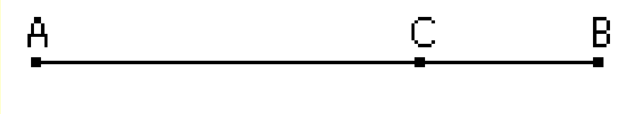
NUMERO DE ORO / PROPORCIÓN AUREA

Jorge Alonso Cotera Guerra

LICENCIADO EN EDUCACIÓN BÁSICA
CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICA

LAS SUCECIONES DE FIBONANCI Y SU RELACIÓN CON EL NÚMERO DE ORO

El numero de oro, la divina proporción y la sección áurea, son tres expresiones con mucha relación en el campo de la Matemática. El número de oro fue descubierto por los antiguos griegos (aunque culturas anteriores ya lo utilizaban en sus construcciones) y hacen referencia a lo que sucede cuando se divide un segmento en dos partes de manera que el cociente entre la longitud del segmento mayor y la longitud del segmento inicial es igual al cociente entre la longitud del segmento menor y la del segmento mayor.



El punto **C** crea una **sección áurea** en el segmento rectilíneo AB.

Esto se comprueba si $\frac{AC}{AB} = \frac{CB}{AC}$, y a esta se le llama la **divina proporción**.

Esta proporción tiene el valor numérico **0,618...,** al cual se le llama **Número de Oro** y que se puede calcular de la siguiente manera:

Si **AB = 1** y la longitud de **AC = X**, entonces $\frac{AC}{AB} = \frac{CB}{AC}$ se convierte en

$$\frac{X}{1} = \frac{(1-X)}{X}.$$

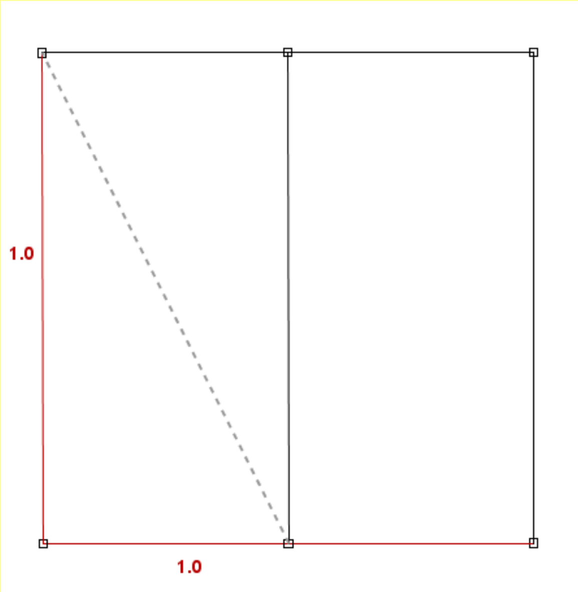
Multiplicando ambos lados de esta ecuación por X, se tiene que $\mathbf{X^2 = 1 - X}$; y por tanto $\mathbf{X^2 + X - 1 = 0}$.

Esta ecuación de segundo grado se puede resolver utilizando la fórmula cuadrática, que da:

$$X = \frac{\left(-1+\sqrt{5}\right)}{2} \quad \Rightarrow \quad X = \frac{\left(-1+2.23...\right)}{2} \quad \Rightarrow \quad X = \frac{1.23...}{2}$$

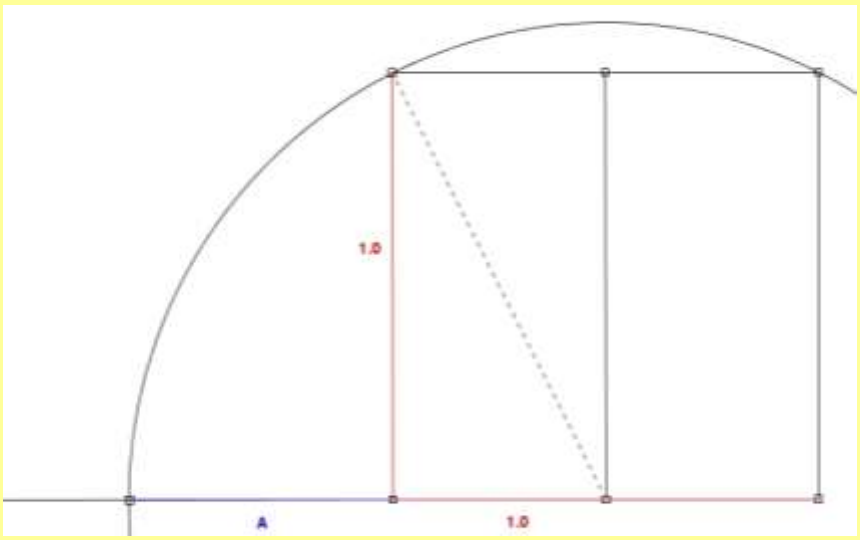
X = 0,6180339...

Ciertos historiadores afirman que las propiedades de las secciones áureas ayudaron a los discípulos del matemático y filósofo griego Pitágoras a descubrir las rectas inconmensurables, que son el equivalente geométrico de los números irracionales. Sin embargo, lo que sí es cierto es que desde la antigüedad, muchos filósofos, artistas y matemáticos se han interesado por la sección áurea, que los escritores del renacimiento llamaron *divina proporción.* Una de sus mayores utilidades fue en la construcción de figuras y cuerpos de forma rectangular en donde sus lados mantienen la singular proporción.



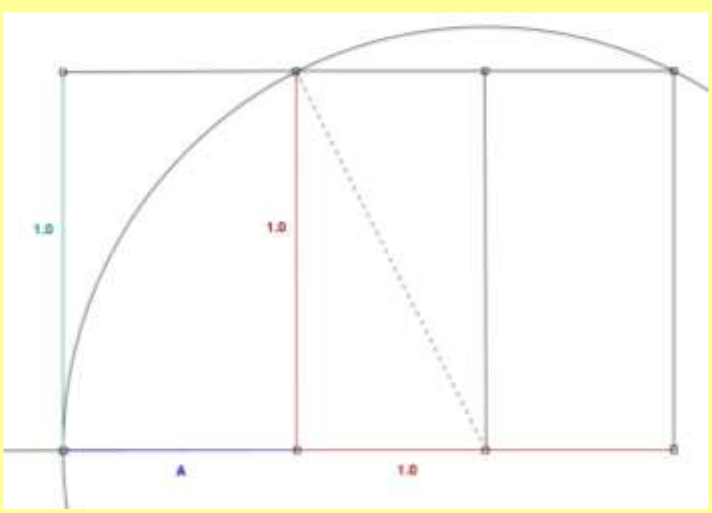
- Tomemos un cuadrado de lado 1, y dividámoslo en dos rectángulos iguales.

- Luego tracemos una diagonal a uno de los dos rectángulos (El de la izquierda)
- Luego prolonguemos hacia la izquierda el lado de la base del cuadrado.



- Sobre la prolongación, con la ayuda del compás, marquemos un punto a igual distancia que la longitud de la diagonal hallada, a partir del punto medio de la base del cuadrado.

- A la distancia adicional, desde el extremos del cuadrado a punto de corte sobre la proyección la llamaremos A.



- Construyamos ahora un nuevo rectángulo de base “A+1” y altura “1” hacia la derecha del cuadrado original (el grande), e inmediatamente se forma otro rectángulo de base “A” y altura “1” (el pequeño).

De esta manera la relación que hay entre “**1”** y “**A+1**” (el lado menor y el lado mayor respectivamente del rectángulo grande) es la misma entre “**A**” y “**1**” (el lado menor y el lado mayor respectivamente del rectángulo pequeño)

Ahora, expresemos lo anterior así:

$$\frac{1}{A+1} = \frac{A}{1} \quad \Rightarrow \quad 1 \times 1 = A \times (A+1) \quad \Rightarrow \quad 1 = A^2 + A$$

$$A^2 + A - 1 = 0$$

Esta ecuación de segundo grado se puede resolver utilizando la fórmula cuadrática, que da:

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{-(1) \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$A = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Tenemos así dos soluciones:

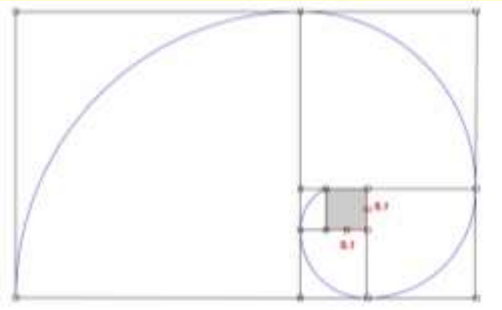
$$A = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{-1-2.23...}{2} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{-3.23...}{2} \quad \Rightarrow \quad A = 1.618033$$

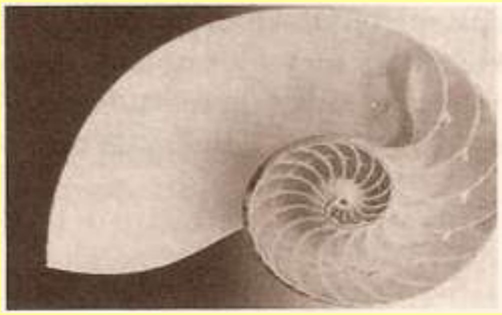
$$A = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \rightarrow A = \frac{-1+2.23...}{2} \rightarrow A = \frac{1.23...}{2} \rightarrow A = 0.618033$$

A = 0,6180339...

Dicho en otra palabras, los lados cortos de un rectángulo con la divina proporción (Áureo) son el 61.8% de los lados largos.

Ahora, también es posible construir una espiral de oro con un rectángulo áureo. Tomemos con el compás la medida del lado más largo del rectángulo áureo y proyectemos uno de los lados mas cortos tratando de seguir la línea del anterior arco, de esta manera construimos otro rectángulo áureo, y así sucesivamente. Finalmente solo dejamos los trazos del compás al interior de los cuadrados.





Lo curioso de este diseño es que aparece mucho en la naturaleza:

Esta curva ha cautivado, por su belleza y propiedades, la atención de matemáticos, artistas y naturalistas. El gran matemático J. Bernoulli, fascinado por sus encantos, la llamó **spira mirabilis**, rogando que fuera grabada en su tumba.

La razón de que haya número de oro por todas partes es muy sencilla: simplemente porque es una relación muy estética y agradable al ojo.

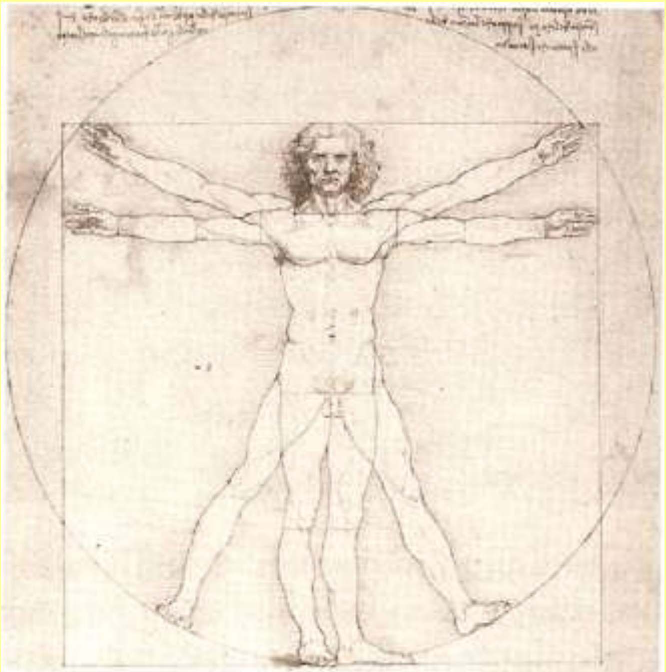
En la naturaleza aparece la proporción áurea también en el crecimiento de las plantas, las piñas, la distribución de las hojas en un tallo, dimensiones de insectos y pájaros, y la formación de caracolas.

Esta proporción dorada también figura en muchísimas obras de arte, especialmente en la pintura y en la arquitectura. Vasta mirar alguna de las obras maestras más importantes. Se asegura que en la gran pirámide de Keóps el cociente entre la altura de uno de los tres triángulos que forman la pirámide y el lado, es exactamente el doble del número dorado.

Lo anterior puede ser una casualidad, pero posteriormente en Atenas el Partenón esta enmarcado en un rectángulo áureo, y en la actualidad, el famoso arquitecto Le Corbusier elaboraba maquetas para construcciones con la proporción área.

También se sabe que pinturas como la Ultima Cena de Leonardo da Vinci guarda las mismas proporciones.

El mismo da Vinci creó su *Hombre de Vitruvio* o *La Divina Proporción* para unas ilustraciones publicadas por el matemático Lúea Pacioli en 1509.



En particular, Pacioli propone un hombre perfecto en el que las relaciones entre las distintas partes de su cuerpo sean proporciones áureas. Estirando manos y pies y haciendo centro en el ombligo, se dibuja la circunferencia. El cuadrado tiene por lado la altura del cuerpo que coincide, en un cuerpo armonioso, con la longitud entre los extremos de los dedos de ambas manos cuando los brazos están extendidos y formando un ángulo de 90 grados con el tronco. Resulta que el cociente entre la altura del hombre (lado del cuadrado) y la distancia del ombligo a la punta de la mano (radio de la circunferencia) es el número áureo.

El pentáculo es un símbolo pagano, en que se pretendía representar al cáliz y la espada o a Magdalena y Jesús, más tarde este símbolo fue acogido por la Iglesia católica para representar a la Virgen María. Leonardo da Vinci lo utilizó para asentar en él al *Hombre de Vitruvio.*

Gráficamente, el número áureo es la relación entre el lado del pentágono regular y la recta que une dos vértices no consecutivos de este. Si se toma como unidad un lado del pentágono interior, cualquier línea que marca los brazos de la estrella mide el “número de oro”. También la longitud total de cualquiera de las cinco líneas que atraviesan la estrella mide el “numero de oro elevado” a la cuatro, mientras que la suma del lado interior y cualquiera de sus brazos es el “numero de oro” elevado a la dos.

Teniendo en cuenta la gran simetría de este símbolo, se observa que dentro del pentágono interior es posible dibujar una nueva estrella, hasta el infinito. Del mismo modo, es posible dibujar un pentágono por el exterior, que sería a su vez el pentágono interior de una estrella más grande.

Al medir la longitud total de una de las cinco líneas del pentáculo interior, resulta igual a la longitud de cualquiera de los brazos de la estrella mayor, o sea el “numero de oro”.

En la actualidad las tarjetas de crédito o nuestro DNI tienen número áureo; si dividimos el lado mayor del rectángulo entre su lado menor, tendremos un resultado de 1,61803398, que es nuestro amigo perfecto. Los paquetes de tabaco también están diseñados de forma tan perfecta que llevan esta divina proporción en su forma rectangular. Los folios Din A4 también siguen esta proporción.

Evidentemente, todo esto está muy estudiado, pues nuestra capacidad perceptiva se acomoda más fácilmente a estas dimensiones. Resulta muy fácil demostrar como el número áureo impregna nuestra visión.

Si algo nos llama la atención por su belleza, tal vez sea porque el número de oro está en la fuente de diseño.

LOS NUMEROS DE FIBONACCI

Ahora bien, Leonardo Fibonacci fue un matemático italiano que recopiló y divulgó el conocimiento matemático de los clásicos grecorromanos, árabes e indios y realizó aportaciones en los campos matemáticos del álgebra y la teoría de números; introdujo los números arábigos en Europa. Nació en Pisa, una ciudad comercial donde aprendió las bases del cálculo de los negocios mercantiles. Cuando tenía unos 20 años, se fue a Argelia, donde empezó a aprender métodos de cálculo árabes, conocimientos que incrementó durante viajes más largos.

Utilizó esta experiencia para mejorar las técnicas de cálculo comercial que conocía y para extender la obra de los escritores matemáticos clásicos, como los matemáticos griegos Diofante y Euclides.
Son muy pocas las obras conocidas de este talentoso matemático, uno de sus hallazgos más celebre fue el relacionado con el famoso problema de los conejos publicado en su **Líber abbaci,** y a lo que hoy se le llama la sucesión de Fibonacci.

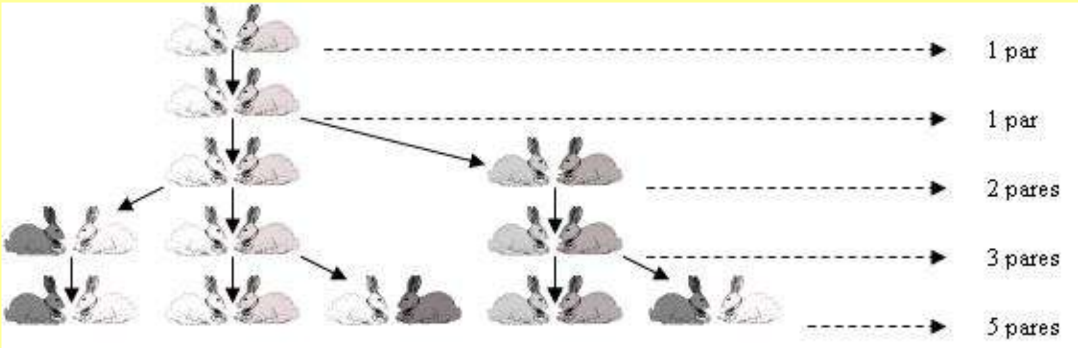
¿Cuántos pares de conejos situados en un área cercada se pueden reproducir en un año, a partir de un par de conejos, si cada par da lugar al nacimiento de uno nuevo por cada mes, comenzando con el segundo mes?

Mediante una sencilla gráfica podemos observar el crecimiento en el número de pares de conejos. Así, en el primero y segundo meses tendríamos solo un par de conejos. Al finalizar este segundo mes, la hembra haría su primer parto y, por tanto, para el tercer mes ya tendríamos dos pares de conejos. El cuarto mes los padres tendrían otro parto, pero aún no los hijos, con lo que tendríamos tres pares. Para el quinto mes se produciría el primer parto de los hijos y otro más de los padres, con lo que ya tendríamos cinco pares de conejos correteando por el campo.

Si continuamos con esta lógica y seguimos el proceso, podemos calcular el número de conejos que tendríamos durante los siguientes meses, y que cumplirían la siguiente sucesión:

1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

377	610	987	1.597	2.584	4.181	6.765	10.946	17.711	28.657	46.368



Esta sucesión tiene la peculiaridad de que cada nuevo término es la suma de los dos anteriores.

($k_n = k_{n-1} + k_{n-2}$) y a cada uno de ellos se le denomina número de Fibonacci.

Lo cierto es que Fibonacci no investigó sobre ella, simplemente presentó el «trivial» problema de los conejos en su libro.

Fue en el siglo XIX cuando el matemático francés Edouard Lucas retomó y profundizó en el problema y a partir de ese momento, la sucesión de Fibonacci ha intrigado a los matemáticos debido a su tendencia a manifestarse en los lugares más curiosos, tanto de la naturaleza como de la creación humana.

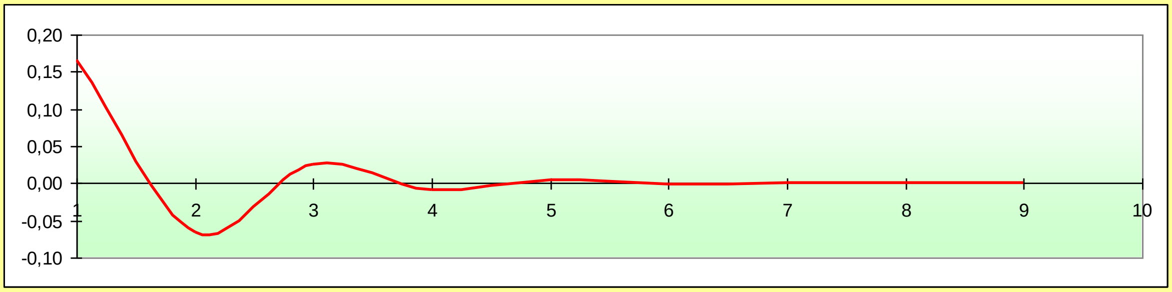
Inicialmente tomamos el numero 1 y luego el numero dos, y de aquí en adelante cada numero siguiente lo obtenemos sumando los dos números anteriores.

Así:

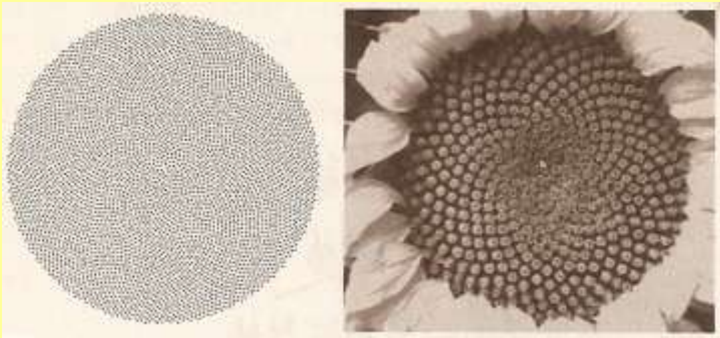
1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
x	x	(1+2)	(2+3)	(3+5)	(5+8)	(8+13)	(13+21)	(21+34)	(34+55)
1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

La relación que guarda los números de Fibonanci con la divina proporción o con el número de oro es la siguiente. Si dividimos cada número de Fibonanci por su inmediatamente anterior, vamos a encontrar una nueva sucesión formada por números con diferencia entre si, tanto positivas como negativa pero cada vez más pequeña, gracias a que cada numero es cada vez más cercano a el valor 0.6180339.

1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
0,500000	0,666667	0,600000	0,625000	0,615385	0,619048	0,617647	0,618182	0,617978	0,618056
0,16667	-0,06667	0,02500	-0,00962	0,00366	-0,00140	0,00053	-0,00020	0,00008	



Los números de Fibonacci se presentan en la naturaleza en diversas situaciones que rozan lo mágico pero que se deben, por supuesto, a una serie de razones lógicas; por ejemplo si contamos las semillas que se forman en los espirales de una flor de girasol hacia la derecha y hacia la izquierda, podemos observar que hay 34 curvas en un sentido y 21 en el otro, siendo ambos dos números consecutivos en la sucesión de Fibonacci.



Otra observación que se puede realizar es con los frutos de algunas plantas, por ejemplo si observamos una piña y la miramos por el lado donde estaba sujeta al árbol, podemos ver dos conjuntos de espiras: unas que giran en sentido de las agujas del reloj y otras en sentido contrario.
Pues bien, si las contamos, podemos contemplar cómo el número de espiras en una y otra dirección son dos números de Fibonacci consecutivos; en unas especies 5 y 8, y en otras 8 y 13. Los pétalos de muchas flores también siguen la sucesión de Fibonacci.

Las margaritas tienen, por lo general, 34, 55 u 89 pétalos, los tres son números de Fibonacci; la azucena tiene tres pétalos y, con frecuencia, dos baterías de tres pétalos; la rosa salvaje tiene cinco pétalos, otro número de Fibonacci; la espuela de caballero tiene ocho pétalos (sexto número de Fibonacci); la caléndula y la hierba lombriguera cuentan con 13 pétalos y la achicoria tiene 21 pétalos.

También podemos encontrar números de Fibonacci en el ordenamiento de las hojas en una rama o en el de las ramas de un árbol.

El hecho de que encontremos tantas veces los números de Fibonacci en la naturaleza tiene una razón, y es que minimizan los espacios perdidos al momento de organizar los elementos en un empaque. De la misma forma que los objetos cuadrados quedan mejor empacados en estructuras cuadradas o los redondos en estructuras hexagonales, la forma más eficiente de ordenar las hojas en un tallo o las semillas de una flor, cuando ambas siguen creciendo, es siguiendo la secuencia de números de Fibonacci.

Este patrón corresponde a un ángulo de rotación a partir del punto central, mediante el cual los nuevos elementos (hojas, pétalos) se van organizando a medida que crecen.

Las hojas a lo largo de un tallo de una planta o las ramas a lo largo de un tronco tienden a crecer en posiciones que optimizan su exposición al sol, lluvia o aire. A medida que el tallo crece, se producen hojas espaciadas de una forma bastante regular, y sin estar unas encima de otras.

Por el contrario, el pasaje de una hoja a la siguiente está caracterizada por un desplazamiento de tipo «atornillado» alrededor del tallo. Estructuras similares pueden encontrarse en las pinas o en las semillas de los girasoles, como ya hemos mencionado.

Este fenómeno se llama «filotaxis», palabra acuñada por el naturalista suizo Charles Bonnet. Por ejemplo, el tilo tiene hojas opuestas (que corresponden a media vuelta alrededor del tallo), y tiene por lo tanto un factor filotáctico igual a 1/2. En otras plantas, como el avellano, zarzamora y haya, el paso de una hoja a otra necesita un tercio de vuelta (factor filotáctico igual a 1/3). En el manzano, roble y árbol de damascos (albaricoque), tienen hojas cada 2/3 de vuelta y el peral y el sauce llorón las tienen cada 3/8 de vuelta. Es fácil darse cuenta de que todas estas fracciones están formadas por números de Fibonacci.

El hecho de que las hojas de las plantas siguen ciertos patrones fue observado en la Antigüedad por Teofrasto (372-287 a. de C.) en Investigación sobre las plantas. Escribe aquellas plantas que tienen hojas chatas, las tienen siguiendo un patrón regular. Plinio el Viejo (23-79 d. de C.) realizó una observación similar en su gran obra Historia Natural, cuando habla sobre «intervalos regulares» entre hojas «posicionadas circularmente alrededor del tallo». El estudio de la filotaxis no fue más allá de estas observaciones cualitativas, hasta que en el siglo XV Leonardo da Vinci (1452-1519) agregó un elemento cuantitativo a la descripción de la distribución de las hojas al notar que estas estaban distribuidas en patrones espiralados, en ciclos de a 5 (que corresponde a un ángulo de 2/3 de vuelta). La primera persona en descubrir (intuitivamente) la relación entre la fiíotaxis y los números de Fibonacci fue Johannes Kepler.

Las abejas también tienen relación con las series de Fibonacci: si se observan las celdas hexagonales de una colmena y se coloca a una abeja en una cualquiera de ellas, y se le permite alimentar a la larva, suponiendo que continuará siempre por la celda contigua de la derecha, veremos que hay solo una ruta posible para la siguiente celdilla, dos hacia la segunda, tres hasta la tercera, cinco hasta la cuarta, ocho rutas posibles hacia la quinta, etcétera.

Continuando con las abejas, los machos o zánganos de la colmena tienen árboles genealógicos que siguen estrictamente una distribución de Fibonacci. En efecto, los machos no tienen padre, por lo que él (1) tiene una madre (1, 1), dos abuelos, los padres de la reina, (1, 1, 2), tres bisabuelos, porque el padre de la reina no tuvo padre, (1, 1,2, 3), cinco tatarabuelos (1, 1, 2, 3, 5) y ocho tatarabuelos (1, 1, 2, 3, 5, 8).

También en la música hay presentes números de Fibonacci, siendo el instrumento que mejor los refleja el piano. La subdivisión de un teclado se hace en octavas, compuestas cada una de ellas por ocho teclas blancas y cinco negras; las teclas negras se distribuyen a lo largo del teclado alternando en grupos de dos y tres. Un teclado completo se compone de once octavas, aunque puede tener una tecla más, es decir, 89. El acorde y arpegio por excelencia que permiten identificar cualquier tonalidad son los formados por las notas primeras, terceras, quinta y octava de la escala de dicha tonalidad.

El compositor húngaro Bela Bartok y el francés Olivier Messíaen utilizaron esta serie de Fibonacci para determinar la duración de las notas en algunas de sus obras.

Resulta sorpréndete y curioso que en tantos campos se aplique esta curiosa sujeción, lo cual sirve de motivación para investigarlos con cierta insistencia.

Como ya habíamos anotado, los números de Fibonacci tienen varias propiedades. Sin duda la más curiosa, e importante, es que el cociente de dos números consecutivos es lo que llamamos el número áureo, cuya proporción también se ve mucho en la naturaleza, en muchas obras de arte, en las partes del cuerpo humano, en construcciones modernas como el DNI o las tarjetas de crédito, etcétera.