# 15. Axiomatización de los números reales

*Las matemáticas no estudian los objetos, sino las relaciones entre los objetos*
Henry Poincaré

Una presentación axiomática consta de unos *términos no definidos*, *conceptos primitivos* no susceptibles de definición y un *conjunto de axiomas* o *proposiciones primeras*[1], relaciones entre los términos no definidos que aceptamos como ciertas; éstos constituyen el punto de partida de una teoría matemática en la cual se plantean otras afirmaciones que se deducen de dichos axiomas, los teoremas; dicho de otra forma, los teoremas se demuestran a partir de los axiomas siguiendo una manera de razonar[2], basada en la lógica, generalmente, la lógica bivalente o lógica clásica[3].

Suponemos que existen unos entes que llamamos números reales, dos operaciones básicas que llamamos suma y multiplicación y una relación de orden, suponemos

[1] PASTOR, J, Rey., *Análisis Matemático*, vol I, Editorial Kapelusz, Buenos Aires, 1952, p. 10.
[2] "*Para Hilbert, la demostración es una cadena de afirmaciones, construida siguiendo reglas estrictas que garantiza que el enunciado se deduce de los axiomas empleados*" (citado por Oostra, A., 1999)
[3] El ajedrez es similar a la presentación axiomática, en el sentido que las piezas del juego se caracterizan por sus movimientos más no por su forma o nombre, podríamos incluso jugar ajedrez sin tablero y fichas materiales, sólo requerimos respetar las reglas.

además que cumplen unos axiomas, hacemos unas definiciones y luego, deducimos reglas y teoremas que ellos cumplen.

Estos axiomas se clasifican en tres grupos: *axiomas de campo* (hacen referencia a las propiedades básicas que cumplen los reales con dos operaciones definidas: la adición y la multiplicación), *axiomas de orden* que establecen los criterios para comparar números, identificando cuándo un número es mayor, menor o igual que otro, y un axioma de completitud que nos permite introducir los números irracionales y estudiar las propiedades de continuidad de los números reales[4].

## 15.1. Axiomas de campo

En el conjunto de los números reales están definidas dos operaciones la adición (+) y la multiplicación, ellas satisfacen los siguientes axiomas:

La pareja (R, +) es un grupo abeliano, esto significa que

C1. Si $a$, $b$ son números reales, entonces $a + b$ es un número real[5].

C2. ***Propiedad asociativa de la adición*:** Si $a$, $b$, $c$ son números reales, entonces

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

C3. ***Existen un elemento idéntico para la adición en el conjunto de los números reales***, que notamos 0 y es tal que para cualquier número real a se cumple que:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

C4. Para todo número real $a$ ***existe*** un elemento que llamamos ***inverso aditivo***, y notamos $-a$, tal que:

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

C5. ***Propiedad conmutativa de la suma*:** Si $a$, $b$ son números reales, entonces

---

[4] La presentación axiomática de los números reales hecha originalmente por Hilbert establece cuatro grupos de axiomas: Axiomas de conexión, de cálculo, de ordenación y de completez.

[5] Muchos textos que hacen una presentación axiomática de los números reales excluyen este primer axioma y el análogo a éste con la multiplicación, dado que al determinar la adición y la multiplicación como operaciones, en el sentido moderno, no los requieren; sin embargo, Hilbert en su versión axiomática de $\mathbb{R}$, sí los incluye dentro del primer conjunto de axiomas; nosotros también lo incluiremos dado que no hemos definido qué es una operación.

$$a + b = b + a$$

La operación que llamamos multiplicación y que notamos con el signo $\times$, es tal que la pareja $(\mathrm{R} - \{0\}, \times)$ es un grupo abeliano, esto significa que:

C6. Si $a$, $b$ son reales, entonces $a \times b$ es un número real.

C7. ***Propiedad asociativa de la multiplicación***: Si $a$, $b$, $c$ son números reales, entonces

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

C8. ***Existe un elemento idéntico para la multiplicación el conjunto de los números reales***, que notamos 1, tal que para cualquier número real $a$ se cumple que:

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

C9. ***Para todo número real a diferente de cero*** $(a \neq 0)$ ***existe*** un número real que llamamos ***el inverso multiplicativo*** de $a$ y notamos $a^{-1}$ o $\frac{1}{a}$, de tal manera que

$$a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = 1.$$

C10. ***Propiedad conmutativa de la multiplicación:*** Si $a$, $b$ son números reales, entonces

$$a \times b = b \times a.$$

C11. ***Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma de números reales****:* Esta propiedad establece un vinculo entre las dos operaciones: Si $a$, $b$, $c$ son números reales, entonces:

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

## 15.1.1 Propiedades de las operaciones con respecto a la igualdad entre números reales

La igualdad entre números reales *es compatible* con las operaciones en el sentido de que:

Para todo $a, b, c, d$ números reales, si

$$a = b \text{ y } c = d \quad \text{entonces} \quad a + c = b + d \text{ y } \quad a \times c = b \times d.$$

A esta propiedad la llamamos también ***propiedad de uniformidad de la adición y la multiplicación respectivamente.***

### 15.1.2 Definiciones

Si $a$, $b$ son números reales, definimos la ***sustracción*** entre $a$ y $b$ por:

$$a - b = a + (-b).$$

y la ***división*** entre $a$ y $b$ por:

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}.$$

siempre que $b$ no sea 0.

Iniciemos mostrando algunos números reales, por ejemplo, el axioma 8 garantiza la existencia de un elemento 1 y el axioma 1, garantiza que la suma de dos números reales es un número real, en particular

1 + 1 es un número real que notaremos 2

De la misma forma aseguramos la existencia de

$$2 + 1 = 3$$

y así sucesivamente, construimos una copia de los números naturales.

El axioma 4 asegura la existencia del negativo de cada uno de los números descritos y con ello obtenemos el conjunto de los números enteros.

El axioma 9 y la definición de división nos garantizan la existencia de una copia de los números racionales; es decir números de la forma $\frac{a}{b}$ para cualquier par de enteros $a$ y $b$ con $b$ diferente de 0.

Con los axiomas mencionados hasta ahora, no es posible determinar la existencia de algún número irracional en el conjunto de los números reales, para esto se requiere el axioma de completez, que será introducido posteriormente; pero todos los teoremas que demostramos en esta sección son, por supuesto, aplicables a los números irracionales.

Mostremos ahora propiedades que se cumplen para todos los números reales, en particular las leyes del álgebra elemental.

### 15.1.3 Teoremas

1. El elemento idéntico de la suma, el cero 0, determinado en el axioma C3 es único.

*Prueba*

Supongamos que existen dos números reales 0 y 0´ que cumplen el axioma C3, entonces

$$0 + 0' = 0' \quad \text{porque 0 es módulo}$$

$$0 + 0' = 0 \quad \text{porque } 0' \text{ es módulo}$$

lo que implica que 0 = 0´, por ser los dos iguales a un mismo número.

2. **Ejercicio**: el 1 es único

3. $0 \neq 1$.

*Prueba*

Si no fuera así, sería

$$0 = 1 = 2 = 3 = \ldots$$

y habría un solo número real[6]. Pues, si 0 = 1 entonces,

$$0\times 1 = 0 = 1$$

por ser 1 módulo de la multiplicación, pero también, por los axiomas C3 y C11

$$0\times 1 = (0 + 0)\times 1 = 0\times 1 + 0\times 1 = 0$$

por lo tanto

$$0 = 0\times 1 = 0\times 1 + 0\times 1 = 1 + 1 = 2$$

$$0 = 0\times 1 = 0\times 1 + 0\times 1 = 2 + 0 = 2 + 0\times 1 = 3 \ldots$$

[6] El conjunto {0}, satisface de manera trivial los axiomas de campo, pero no es lo suficientemente rico, para que amerite un estudio más profundo, por esta razón lo dejaremos de lado, por ahora.

4. ***Propiedad cancelativa de la adición:*** Si $a$, $b$ son números reales y

$$a + b = a + c \quad \text{entonces} \quad b = c$$

*Prueba*

Supongamos que

$$a + b = a + c$$

por la propiedad uniforme de la adición, sumamos en ambos lados de la igualdad el mismo número y obtenemos

$$(-a) + (a + b) = (-a) + (a + c)$$

y por el axioma C2

$$((-a) + a) + b = ((-a) + a) + c$$

ahora, usamos el axioma C4, para obtener:

$$0 + b = 0 + c$$

y por el axioma C3, concluimos que

$$b = c$$

5. **Ejercicio**: ***Propiedad cancelativa de la multiplicación***: si $a \times b = a \times c$ y $a \neq 0$ entonces $b = c$

6. El inverso aditivo de un número real es único

*Prueba*

El axioma C4 garantiza la existencia de por lo menos un inverso aditivo para cada número real a; supongamos que a tiene dos inversos aditivos diferentes $(-a)$ y $(-a')$ entonces,

| | |
|---|---|
| $(-a) + a = 0$ | Por ser $(-a)$ un inverso aditivo |
| $(-a') + a = 0$ | Por ser $(-a')$ un inverso aditivo |
| $(-a) + a = (-a') + a$ | Por la propiedad transitiva de la igualdad |
| $(-a) = (-a')$ | Por el teorema 4. |

7. **Ejercicio**: el inverso multiplicativo de un número real es único

8. Para todo par de números reales $a$ y $b$, si

$$a + b = 0 \text{ entonces } b = -a$$

*Prueba*

Supongamos que $a + b = 0$ entonces por la propiedad uniforme de la adición:

$$(-a) + (a + b) = (a) + 0$$

por el axioma C2

$$((-a) + a) + b = (-a) + 0$$

por el axioma C4

$$0 + b = (-a) + 0$$

por el axioma C3

$$b = (-a)$$

9. **Ejercicio**: Para todo par de números reales $a$ y $b$, si $a \neq 0$ y

$$a \times b = 1 \quad \text{entonces} \quad b = \frac{1}{a}$$

10. Para todo número real $a$ se tiene que $0 \times a = 0$

*Prueba*

| | |
|---|---|
| $0 \times a = (0 + 0) \times a$ | Por el axioma C3 |
| $0 \times a = 0 \times a + 0 \times a$ | Por el axioma C11 |
| $0 \times a + (-(0 \times a)) = (0 \times a + 0 \times a) + (-(0 \times a))$ | Por la propiedad uniforme de la adición |
| $0 = 0 \times a + (0 \times a + (-(0 \times a)))$ | Por los axiomas C4 y C2. |
| $0 = 0 \times a$ | Por el axioma C4 |

11. 0 no tiene inverso multiplicativo.

*Prueba*

Supongamos que el cero *si* tiene inverso multiplicativo, entonces:

$0\times\frac{1}{0}=1$ Por el axioma C9.

$0 = 1$ Por el teorema 10

Pero esto contradice el teorema 3, y por lo tanto *no es cierto* que 0 tenga inverso multiplicativo.

12. **Ejercicio**: Para todo número real $a$ se cumple que si $a \neq 0$, entonces $\frac{0}{a}=0$

13. Para todo número real $a$ se cumple que si $a \neq 0$, entonces $\frac{a}{a}=1$

*Prueba*

$\frac{a}{a}=a\times\frac{1}{a}$ Por la definición de división

$\frac{a}{a}=1$ Por el axioma C9.

14. $\frac{1}{1}=1$.

*Prueba*

$\frac{1}{1}=1\times\frac{1}{1}$ Por la definición de división

$\frac{1}{1}=1$ Por el axioma C9.

15. Para todo número real $a$,

$$\frac{a}{1}=a$$

*Prueba*

$\frac{a}{1}=a\times\frac{1}{1}$ Por la definición de división

$\frac{a}{1} = a \times 1$ Por el teorema 14

$\frac{a}{1} = a.$ Por el axioma C8.

16. Para todo número real $a$ se tiene que

$$a = -(-a)$$

*Prueba*

Por el axioma C4 sabemos que

$$a + (-a) = 0$$

y como el inverso aditivo de un número es único, teorema 6, entonces el inverso aditivo de $(-a)$ es $a$ lo que significa que

$$a = -(-a)$$

17. **Ejercicio**: Para todo número real $a$ se tiene que, si $a \neq 0$, entonces

$$\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$$

18. Para todo par de números reales $a$ y $b$ se tiene que

$$-(a+b) = (-a) + (-b)$$

*Prueba*

Por el axioma C4, tenemos que

$$a + (-a) = 0$$

$$b + (-b) = 0$$

y según la propiedad uniforme de la adición y el axioma C3,

$$(a + (-a)) + (b + (-b)) = 0$$

De acuerdo con los axiomas C2 y C5,

$$(a + b) + ((-a)) + (-b)) = 0$$

y por ser único el inverso aditivo, la anterior igualdad significa que el inverso aditivo de $((-a)) + (-b))$ es $(a + b)$ o sea que:

$$-(a+b) = (-a) + (-b)$$

19. **Ejercicio**: Para todo par de números reales $a$ y $b$ se tiene que:

$$\frac{1}{a\times b} = \frac{1}{a}\times\frac{1}{b}$$

20. Para todo par de números reales $a$ y $b$ se tiene que

$$(-a)\times b = -(a\times b)$$

*Prueba*

$[(a + (-a)]\times b = a\times b + (-a)\times b$ Por el axioma C11.

$0\times b = a\times b + (-a)\times b$ Por el axioma C4

$0 = a\times b + (-a)\times b$ Por el teorema 10

$(-a)\times b = -(a\times b)$ Por el teorema 6.

21. Para todo par de números reales $a$ y $b$ se tiene que

$$(-a)\times(-b) = (a\times b)$$

*Prueba*

$[(a + (-a)]\times(-b) = a\times(-b) + (-a)\times(-b)$ Por el axioma C11.

$0\times(-b) = a\times(-b) + (-a)\times(-b)$ Por el axioma C4

$0 = a\times(-b) + (-a)\times(-b)$ Por el teorema 10

$0 = -(a\times b) + (-a)\times(-b)$ Por el teorema 20

$(-a)\times(-b) = -(-(a\times b))$ Por el teorema 6.

$(-a)\times(-b) = (a\times b)$ Por el teorema 16.

22. Para todo número real $a$ se tiene que $a - 0 = a$

*Prueba*

$a - 0 = a + (-0)$ Por la definición de sustracción.

$(-0) + 0 = 0$ Por el axioma C4

$(-0) = 0$ Por el axioma C3

$a + (-0) = a + 0$ Reemplazando $(-0) = 0$

$a + (-0) = a$ Por el axioma C3.

$a - 0 = a$ Por la transitividad de la igualdad.

23. **Ejercicio**: Para todo número real $a$ se tiene que, $a - a = 0$

24. Para todo $a, b$ y $c$ números reales se tiene que

$$(a - b) + (b - c) = (a - c)$$

*Prueba*

$(a - b) + (b - c) = (a + (-b)) + (b + (-c))$ Por la definición de sustracción

$= (a + ((-b) + b)) + (-c)$ Por el axioma C2.

$= (a + 0) + (-c)$ Por el axioma C4.

$= a + (-c)$ Por el axioma C3.

$= a - c \quad 1$ Por la definición de sustracción.

25. Para todo $a, b$ y $c$ números reales se cumple que

$$a \times (b - c) = a \times b - a \times c$$

*Prueba*

$a \times (b - c) = a \times (b + (-c))$ Por la definición de resta

$= a \times b + (a \times (-c))$ Por el axioma C11

$= a \times b + (-a \times c)$ Por el axioma C5 y el teorema 20

$= a \times b - a \times c$ Por la definición de resta.

26. **Ejercicio**: Para todo $a$ y $b$ números reales se tiene que

$$a = b \text{ si y solo si } -a = -b.$$

27. Para todo número real $a$ se cumple que

$$-a = (-1) \times a$$

*Prueba*

$-a = (-a) \times 1$ Por el axioma C8

$-a = -(a \times 1)$ Por el teorema 20

$-a = (-1) \times a$ Por el axioma C5 y el teorema 20.

28. Para todo par de números reales $a$ y $b$ existe un número real $x$ tal que si:

$$a + x = b \text{ entonces } x = b - a$$

*Prueba*

$a + x = b$ Por hipótesis

$(a + x) + (-a) = b + (-a)$ Por la propiedad uniforme de la igualdad

$(a + (-a)) + x = b + (-a)$ Por los axiomas C2 y C5

$0 + x = b + (-a)$ Por el axioma C4

$x = b + (-a)$ Por el axioma C3

$x = b - a$ Por la definición de resta.

29. **Ejercicio**: si $a \times x = b$ y $a \neq 0$ entonces $x = \dfrac{b}{a}$

30. Para todo número real $a$ se cumple que si $a \neq 0$, entonces $\dfrac{1}{a} \neq 0$

*Prueba*

Supongamos que la conclusión *no es cierta*; es decir que

| | |
|---|---|
| $\frac{1}{a} = 0$ | Negación de la conclusión. |
| $\frac{1}{a} \times a = 0 \times a$ | Por la propiedad uniforme de la igualdad |
| $1 = 0 \times a$ | Por el axioma C9 |
| $1 = 0$ | Por el teorema 10. |

Pero esta conclusión es absurda, puesto que contradice el teorema 3, por lo tanto la conclusión debe ser cierta, o sea que:

$$\frac{1}{a} \neq 0 .$$

31. **Ejercicio**: Para todo par de números reales $a$ y $b$ se cumple que si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces

$$a \times b \neq 0$$

Por una argucia lógica, este teorema se puede escribir de otra manera,

$$\text{si} \quad a \times b = 0 \quad \text{entonces} \quad a = 0 \quad \text{o} \quad b = 0$$

en esta forma se usa algunas veces para resolver ecuaciones de segundo grado.

Probemos el teorema en su segunda forma, para ello supongamos que

$$a \times b = 0$$

entonces por el teorema 10,

$$a \times b = 0 \times b$$

si asumimos $b \neq 0$, entonces por el axioma C9, existe $b^{-1}$ y si multiplicamos ambos lados de la igualdad por $b^{-1}$ obtenemos que

$$(a \times b) \times b^{-1} = (0 \times b) \times b^{-1}$$

aplicando los axiomas C7 y C9, concluimos que

$$a = 0$$

si asumimos que $a \neq 0$, obtenemos de manera similar que $b = 0$, lo que concluye nuestra demostración.

32. Si $a$ y $b$ son números reales con $a \neq 0$ y $b \neq 0$ entonces

$$\frac{1}{a \times b} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{b}$$

*Prueba*

| | |
|---|---|
| $a \neq 0$ y $b \neq 0$ | Por hipótesis |
| $(a \times b) \times \dfrac{1}{a \times b} = 1$ | Por la hipótesis, el teorema 31 y el axioma C9 |
| $\dfrac{1}{a} \times \left( (a \times b) \times \dfrac{1}{a \times b} \right) = 1 \times \dfrac{1}{a}$ | Por la propiedad uniforme de la multiplicación |
| $\left( \dfrac{1}{a} \times a \right) \left( b \times \dfrac{1}{a \times b} \right) = \dfrac{1}{a}$ | Por los axiomas C7 y C8 |
| $1 \times \left( b \times \dfrac{1}{a \times b} \right) = \dfrac{1}{a}$ | Por el axioma C9 |
| $\left( b \times \dfrac{1}{a \times b} \right) = \dfrac{1}{a}$ | Por el axioma C8 |
| $\left( \dfrac{1}{b} \right) \times \left( b \times \dfrac{1}{a \times b} \right) = \dfrac{1}{b} \times \dfrac{1}{a}$ | Por la propiedad uniforme de la igualdad la hipótesis y el axioma C9. |
| $\left( \dfrac{1}{b} \times b \right) \left( \dfrac{1}{a \times b} \right) = \dfrac{1}{b} \times \dfrac{1}{a}$ | Por el axioma C7 |
| $1 \times \left( \dfrac{1}{a \times b} \right) = \dfrac{1}{b} \times \dfrac{1}{a}$ | Por el axioma C9. |

$\left(\frac{1}{a\times b}\right)=\frac{1}{a}\times\frac{1}{b}$ Por los axiomas C8 y C10.

33. Si *a*, *b*, *c*, *d* son números reales, *b* y *d* son diferentes de cero, y si

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \text{entonces} \quad a\times d = b\times c$$

*Prueba*

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ Por hipótesis

$a\times\frac{1}{b}=c\times\frac{1}{d}$ Por la definición de división

$\left(a\times\frac{1}{b}\right)\times d=\left(c\times\frac{1}{d}\right)\times d$ Por la uniformidad de la multiplicación

$\left(a\times\frac{1}{b}\right)\times d=c\times\left(d\times\frac{1}{d}\right)$ Por el axioma C7

$(a\times d)\times\frac{1}{b}=c\times 1$ Por los Axiomas C7, C9 y C10

$(a\times d)\times\frac{1}{b}\times b=c\times b$ Por la uniformidad de la multiplicación y el axioma C8.

$(a\times d)\times 1=c\times b$ Por el axioma C9

$a\times d = b\times c$ Por los axiomas C8 y C10.

34. Si *a*, *b*, *c*, *d* son números reales, *b* y *d* son diferentes de cero, entonces

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$$

*Prueba*

$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\left(a\times\frac{1}{b}\right)\times\left(c\times\frac{1}{d}\right)$ Por la definición de división

$=(a\times c)\times\left(\frac{1}{b}\times\frac{1}{d}\right)$ Por los axiomas C7 y C10

$=(a\times c)\times\left(\frac{1}{b\times d}\right)$ Por el teorema 32

$=\frac{a\times c}{b\times d}$ Por la definición de división.

35. Si $a, b$ y $c$ son números reales, con $b \neq 0$ y $c \neq 0$, entonces

$$\frac{a}{b}=\frac{a\times c}{b\times c}$$

*Prueba*

$\frac{a\times c}{b\times c}=\frac{a}{b}\times\frac{c}{c}$ Por el teorema 34

$\frac{a}{b}=\frac{a}{b}\times\left(c\times\frac{1}{c}\right)$ Por la definición de división

$\frac{a}{b} = \frac{a}{b}\times 1$ Por el axioma C9

$\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ Por el axioma C8.

36. **Ejercicio**: Si $a, b, c$ y $d$ son números reales, con $b \neq 0$, $c \neq 0$ y $d \neq 0$, entonces

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\left(\frac{a}{b}\right)\times\left(\frac{d}{c}\right).$$

37. Si $a, b, c$ son números reales y $c \neq 0$, entonces

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

*Prueba*

$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=a\times\frac{1}{c}+b\times\frac{1}{c}$ Por la definición de división

$=(a+b)\times\frac{1}{c}$ Por el axioma C11

$=\frac{a+b}{c}$ Por la definición de división.

38. Si $a, b, c, d$ son números reales, $c \neq 0$ y $d \neq 0$ entonces

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{a\times d+b\times c}{c\times d}$$

*Prueba*

$\frac{a\times d+b\times c}{c\times d}=(a\times d+b\times c)\times\frac{1}{c\times d}$ Por la definición de división

$=\frac{a\times d}{c\times d}+\frac{b\times c}{c\times d}$ Por el axioma C11 y la definición de división.

$=\frac{a\times d}{c\times d}+\frac{b\times c}{d\times c}$ Por el axioma C10.

$=\frac{a}{c}+\frac{b}{d}$ Por el teorema 37.

Los estudiantes en la secundaria inventan algunas reglas que no necesariamente funcionan; por ejemplo: es falso, que para números reales $a, b, c, d$ cualesquiera, si $b \neq 0$ y $d \neq 0$ entonces

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$$

y también que

$$\frac{\frac{a}{b}}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{d}.$$

un lector acucioso, encontrará un ejemplo donde las igualdades mencionadas no se cumplan.

39. Si $a$ y $b$ son números reales, con $b \neq 0$, entonces

$$-\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

La prueba se divide en dos partes, primero probar que

$$-\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-a}{b}$$

*Prueba*

$-\left(\frac{a}{b}\right) = (1)\left(-\frac{a}{b}\right)$ por el axioma C8

$-\left(\frac{a}{b}\right) = (-1)\left(\frac{a}{b}\right)$ por el teorema 20

$-\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{(-1)a}{b}$ por el teorema 34

$-\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-a}{b}$ por el teorema 20.

Falta probar que

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

*Prueba*

$\frac{-a}{b} = -a \cdot \frac{1}{b}$ por la definición de división

$\frac{-a}{b} = (-a)(1) \cdot \frac{1}{b}$ por el axioma C8

$-\dfrac{a}{b}=(-1)(a)(b^{-1})$ por el teorema20 y la definición de $b^{-1}$

$-\dfrac{a}{b}=[(-1)(b^{-1})](a)$ por los axiomas C7 y C10.

$-\dfrac{a}{b}=(-b^{-1})(a)$ nuevamente por el teorema 20

$-\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{-b}(a)$ por la definición de $b^{-1}$.

$\dfrac{-a}{b}=\dfrac{a}{-b}$ por la definición

Finalmente, la propiedad transitiva de la igualdad garantiza que

$$-\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{a}{-b}.$$

Las propiedades que aquí hemos demostrado, son válidas en cualquier conjunto de números con dos operaciones, que podemos llamar también, suma y multiplicación siempre y cuando satisfagan los axiomas C1 a C11, listados al comienzo; una tal estructura se llama un *campo*.

Pero el conjunto de los números reales tiene algo más que las operaciones, también hay manera de comparar dos números reales y establecer si uno es mayor que el otro o no, mostraremos enseguida como formalizar esta idea.

## 15.2 Axiomas de orden

En el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales definimos[7] el orden aditivo entre ellos, diciendo que

$a \leq b$ si y solo si existe un natural $c$ tal que $a + c = b$.

En los números racionales positivos lo hicimos de la misma forma y con los mismos resultados.

[7] LUQUE, C., MORA, L., PAEZ, J., *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: Contar, Inducir*, Universidad Pedagógica Nacional, Editorial Antropos, Bogotá, 2002.

En el primer capítulo, intentamos aplicar el mismo método para definir el orden en un conjunto que incluyera números negativos y nos vimos en el problema de que siempre existe un número real que sumado con otro nos da cualquier otro y así todos los números resultarían menores y mayores que todos los demás.

Es el mismo problema que genera la imposibilidad de definir una teoría de divisibilidad entre números racionales, porque como la multiplicación de los números racionales positivos es un grupo, todo número racional, excepto el 0, divide a cualquier otro.

Sin embargo, vimos la posibilidad de caracterizar a los números positivos para distinguirlos de los demás, lo que nos ayudará a definir un orden para los números reales.

Supongamos que existe un subconjunto **P** de los número reales, que llamamos el conjunto de los *números positivos*, de tal manera que la suma de dos números reales positivos es positiva y el producto de reales positivos también es positivo, el 0 no es positivo y todo número real diferente de 0 es positivo o su inverso aditivo es positivo.

Simbólicamente,

O1. Si $a$, $b$ son números positivos entonces: $a + b$ y $a \times b$ son números positivos.

O2. Si $a$ es un número real, entonces *sólo una* de las siguientes afirmaciones es cierta:

$$a \in \mathbf{P}, \qquad a = 0, \qquad -a \in \mathbf{P}$$

El axioma O2 se conoce como *ley de tricotomía.*

O3. $0 \notin$ P.

### 15.2.1. Definiciones

1. $a < b$ significa que $b - a$ es un número positivo. “$<$” se lee “*menor que*”

2. $a > b$ significa que $b < a$. “$>$” se lee “*mayor que*”

3. $a \leq b$ significa que $a < b$ o $a = b$. “$\leq$” se lee “*menor o igual que*”

4. $a \geq b$ significa que $a > b$ o $a = b$. “$\geq$” se lee “*mayor o igual que*”

Una consecuencia inmediata de las definiciones es que

$$a > 0 \quad \text{si y sólo si} \quad a \text{ es positivo}$$

Decimos que $a$ es *negativo* si $a < 0$, y si $a \geq 0$ se dice que $a$ es *no negativo*.

## 15.2.2 Teoremas

40. La relación $<$ es *transitiva*; es decir, que si

$$a < b \quad \text{y} \quad b < c \quad \text{entonces} \quad a < c$$

*Prueba:*

Si $a < b$ y $b < c$ entonces $b - a \in \mathbf{P}$ y $c - b \in \mathbf{P}$, entonces su suma $(b - a) + (c - b) \in \mathbf{P}$, es decir $c - a \in \mathbf{P}$, por lo tanto

$$a < c$$

La relación $\leq$ es un orden total sobre $\Re$, si $a$ y $b$ son números reales, se cumple exactamente *una* de las siguientes situaciones:

$$a < b, \; a = b, \; b < a$$

Puesto que el número $b - a$ cumple exactamente una de las situaciones:

$$b - a > 0, \; b - a = 0, \; b - a < 0$$

41. La relación $\leq$ es *reflexiva*

*Prueba*

Obviamente, $a = a$ para todo número real $a$.

42. **Ejercicio**: La relación $\leq$ es *antisimétrica*

43. **Ejercicio:** La relación $\leq$ es *transitiva*

Los siguientes teoremas muestran la relación entre el orden y las operaciones algebraicas.

## 15.2.3. Las propiedades de monotonía de la adición y multiplicación de números reales.

44. ***Monotonía de la adición***. Para todo par de números reales $x$, $y$, si

$$x < y \quad \text{entonces} \quad x + z < y + z,$$

para todo número real $z$.

*Prueba*

Supongamos que $x < y$, entonces $y - x \in$ P, por el axioma C3, tenemos que

$$(y - x) + 0 \in \mathbf{P}$$

o lo que es igual, por el teorema 23,

$$(y - x) + (z - z) \in \mathbf{P}$$

para un número real $z$ cualquiera; y por los axiomas C2 y C5, nos queda

$$(y + z) - (x + z) \in \mathbf{P}$$

lo que significa que

$$x + z < y + z.$$

45. ***Ejercicio: Monotonía de la multiplicación:*** Para todo par de números reales $x$, $y$, si

$$x < y, \text{ entonces } x \times z < y \times z,$$

para todo real positivo $z$.

46. Para todo par de números reales $x$, $y$, si

$$x < y, \text{ entonces } x \times z > y \times z,$$

para todo real negativo $z$.

*Prueba*

Supongamos que $x < y$, entonces

| | |
|---|---|
| $y - x \in$ P | por la definición |
| $-z \in$ P | porque $z$ es negativo |
| $(y - x)(-z) \in$ P | por el axioma O1 |
| $(x \times z - y \times z) \in$ P | por el axioma C11 y los teoremas 16, 18, 20 y 21. |
| $x \times z > y \times z$ | por la definición. |

Como el conjunto de los números reales cumple con todas las propiedades anteriores, se dice que son un *campo ordenado*

47. $1 > 0$. Esto significa que $1 \in$ P.

*Prueba*

Supongamos que $1 \notin$ P entonces, o bien

| | |
|---|---|
| $-1 \in$ P | Por el axioma O2 |
| $(-1) \times (-1) \in$ P | Por el axioma O1 |
| $(-1) \times (-1) = 1 \times 1 \in$ P | Por el teorema 21 |
| $1 \times 1 = 1 \in$ P | Por el axioma C8 |

lo que contradice la hipótesis; o bien

| | |
|---|---|
| $1 = 0$ | Por el axioma O2 |

lo que contradice el teorema 3.

Por lo tanto $1 \in$ P, o lo que es lo mismo $1 > 0$.

48. Para todo número real $a$, si $a > 0$ entonces $\frac{1}{a} > 0$

*Prueba*

Como $a > 0$, por el axioma O2, concluimos que $a \neq 0$, y por el axioma C9, existe el número real $\frac{1}{a}$ y para él, por el axioma O2, sólo se tiene una de las siguientes relaciones:

$$\frac{1}{a} > 0, \text{ ó } \frac{1}{a} = 0, \text{ ó } \frac{1}{a} < 0$$

Supongamos que $\frac{1}{a} = 0$, entonces, por el axioma C9 y el teorema 10, tendríamos que

$$1 = a \times \frac{1}{a} = a \times 0 = 0$$

es decir, que

$$1 = 0$$

lo cual es imposible, por que contradice el teorema 3.

Supongamos, entonces, que $\frac{1}{a} < 0$; luego, al multiplicar por el número positivo $a$ obtenemos, por el teorema 44, que

$$a \times \frac{1}{a} < a \times 0$$

es decir que, nuevamente por el axioma C9 y el teorema 10,

$$1 < 0$$

que tampoco es cierto, porque contradice el teorema 46.

Como ninguna de estas dos posibilidades es cierta, la única que queda, por el axioma O2, es que

$$\frac{1}{a} > 0.$$

49. **Ejercicio:** Para todo número real $a$, si $a < 0$ entonces $\frac{1}{a} < 0$

50. Para todo par de números reales $a$ y $b$, se cumple que si

$$a > 0 \text{ y } b < 0 \quad \text{entonces} \quad a \times b < 0$$

*Prueba*

| | |
|---|---|
| $a \in \mathrm{P}$ y $-b \in \mathrm{P}$ | Por hipótesis |
| $a \times (-b) \in \mathrm{P}$ | Por el axioma O1 |
| $-(a \times b) = a \times (-b) \in \mathrm{P}$ | Por el teorema 20 |
| $(a \times b) \notin \mathrm{P}$ | Por el axioma O2 |
| $a \times b \neq 0$ | Porque $a \neq 0$ y $b \neq 0$, por hipótesis. |
| $a \times b < 0$ | Por el axioma O2. |

51. Para todo par de números reales $a$ y $b$, se cumple que si

$$a \times b > 0 \quad \text{entonces} \quad a > 0 \text{ y } b > 0 \quad \text{o} \quad a < 0 \text{ y } b < 0$$

*Prueba*

Supongamos que $a \times b > 0$.

Si $a > 0$, por el teorema 47, tenemos que $\frac{1}{a} > 0$ y por el axioma O1

$$b = \frac{1}{a} \times (a \times b) > 0$$

Si $a < 0$ entonces, por el teorema 48, se cumple que $\frac{1}{a} < 0$ y por el teorema 49

$$b = \frac{1}{a} \times (a \times b) < 0.$$

52. **Ejercicio**: Para todo par de números reales $a$ y $b$, se cumple que si

$$a \times b < 0 \quad \text{entonces} \quad a > 0 \text{ y } b < 0 \quad \text{o} \quad a < 0 \text{ y } b > 0$$

53. Para todo número real $a$, si

$$a \neq 0 \text{ entonces } a^2 > 0$$

*Prueba*

| | |
|---|---|
| $a \neq 0$ | Por hipótesis |

| | |
|---|---|
| $a \in P$ o $-a \in P$ | Por el axioma O2 |
| Si $a \in P$, | |
| $a^2 = a \times a \in P$ | Por el axioma O1 |
| esto significa que $a^2 > 0$. | |
| Si $-a \in P$, | |
| $(-a) \times (-a) = a \times a \in P$ | Por el teorema 21 y el axioma O1 |
| esto significa que $a^2 > 0$. | |

54. **Ejercicio**: Para todo par de números reales $a$ y $b$, se cumple que si

$$a < b \text{ entonces } -a > -b.$$

En resumen, hemos demostrado que *las desigualdades se comportan casi siempre que las igualdades*:

a. Podemos sumar los miembros correspondientes de dos desigualdades del mismo sentido y obtendremos una desigualdad del mismo sentido

b. Podemos sumar (o restar) cantidades iguales a ambos miembros de una desigualdad y obtendremos una desigualdad del mismo sentido

c. Podemos multiplicar o dividir ambos miembros de una desigualdad *por un número positivo* y obtendremos una desigualdad del mismo sentido.

Una *diferencia* en el comportamiento de las desigualdades, con respecto a las igualdades, es que cuando se *multiplican o dividen por un número negativo*, tenemos que cambiar el sentido de la desigualdad.

55. ***La densidad de los números reales:*** Para todo par de números reales $a$ y $b$, si

$$x < y, \text{ existe un número real } z, \text{ tal que } x < z < y$$

*Prueba*

| | |
|---|---|
| $x < y$ | Por hipótesis |
| $x + x < y + x$ | Por el teorema 43 |

| | |
|---|---|
| $x + y < y + y$ | Por el teorema 43 |
| $2x < y + x < 2y$ | Por el axioma C5 y el teorema 39 |
| $x < \frac{y+x}{2} < y$ | Por el teorema 44 |
| $z = \frac{y+x}{2}$ | Es un número real por el axioma C1, C9 y C6. |

56. **Ejercicio**: Para todo par de números reales $a$ y $b$, si

$$a > b \quad \text{entonces} \quad a > \frac{a+b}{2} > b$$

En los siguientes ejercicios adicionales, pretendemos aclarar algunos significados de los teoremas expuestos:

## Ejercicios adicionales

1. *¿Dónde está el error en el siguiente procedimiento?:*

   *Si en la desigualdad* $\frac{1}{x} < 1$ *multiplicamos por* $x$*, a ambos lados de la desigualdad, se concluye que* $\frac{1}{x}$ *es menor que 1 si y sólo si* $1 < x$.

   *Pero, si* $x = -1$ *entonces*

   $$\frac{1}{x} = \frac{1}{-1} = -1$$

   $y$ $-1$ *es menor que* 1.

2. *Si x y y son números reales tales que* $x > 0$ *y* $y < 0$*, señalar si los siguientes números reales son positivos o negativos:*

   *a.* $-y$ *b.* - $(x$ ´ $y)$ *c.* $x$ ´ $y^2$ *d.* $x^2 \times y$ *e.* $\frac{x}{y}$

*f.* $x^y$ *g.* $\frac{x-y}{x}$ *h.* $\frac{x}{y}-x^2$

3. *Demostrar que* $2 > 0$. *Sugerencia:* $2 = 1+1$.

4. *Demostrar que* $3 > 2$ *y que* $3 > 1$.

## 15.3. Axioma de completez

Los axiomas de campo y orden no son suficientes para incluir los números irracionales dentro del sistema de los números reales, pues el conjunto de los números racionales es un campo ordenado; para incluirlos se hace necesario adicionar otro axioma, llamado el *axioma de completez*; antes de enunciarlo, debemos ampliar un poco nuestro vocabulario.

### 15.3.1. Definiciones

Sea A un conjunto de números reales, se dice que:

1. Un número real $b$ es una ***cota superior*** *de* A, si para todo $x$ en A, se tiene que $x \le b$.

2. Un número real $c$ es una ***cota inferior*** *de* A, si para todo $x$ en A, se tiene que $b \le x$.

3. Un conjunto de números reales es ***acotado superiormente*** si tiene por lo menos una cota superior y es ***acotado inferiormente*** si tiene por lo menos una cota inferior.

4. Se llama ***extremo superior*** o ***supremo*** de un conjunto no vacío de números reales a la mínima cota superior de dicho conjunto; en caso de existir, lo llamamos *sup* A o lo notamos $\vee$A. Si A = $\{x, y\}$ escribimos $\vee$A $= x \vee y$.

Más precisamente, $x$ = *sup* A significa que:

*i)* $y \le x$, para todo $y \in$ A y,
*ii)* si $y \le z$ para todo $y$ en A, entonces $x \le z$.

Otra versión para esta definición es:

$x$ = *sup* A si y sólo si:

*i)* $x$ es una cota superior de A y,

*ii)* si $a < x$ entonces $a$ no es cota superior de A

5. Análogamente, un elemento que sea el mayor de las cotas inferiores de un conjunto no vacío de números reales A, lo llamaremos ***extremo inferior*** o ***ínfimo de*** **A** y lo notaremos *inf* A o $\wedge$A, y si A se reduce a dos elementos $x$ y $y$, escribiremos $\wedge A = x \wedge y$.

6. Si $y$ = *sup* A tal que $y \in$ A, entonces $y$ se llama elemento ***máximo*** de A. Si $t$ = *inf* A y $t \in$ A, entonces $t$ se llama elemento ***mínimo*** de A

## Ejemplos

1. En $\wp$(X), dados dos subconjuntos A y B de X el conjunto más pequeño que los contiene a ambos es su unión así:

$$sup\,(A, B) = A \vee B = A \cup B$$

También es claro que

$$inf\,(A, B) = A \wedge B = A \cap B$$

2. En el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, con su orden usual, todo subconjunto A tiene *inf* A; para el conjunto P de los números pares *sup* P, no existe, pero para todo conjunto finito A, existe *sup* A .

3. También puede darse que en un conjunto ordenado X exista *sup* A para todo subconjunto A de X pero no exista *inf* A. Por ejemplo, en las partes no vacías de X, ordenado por la inclusión, dada una colección C finita o infinita de subconjuntos de X existe *sup* C para ella, el conjunto X; pero no existe *inf* C, porque lo sacamos a propósito.

4. 0 es el elemento mínimo de los números naturales.

5. Todo subconjunto de números naturales tiene elemento mínimo.

6. La máxima cota inferior y la mínima cota superior del intervalo abierto de números reales (4,5], son 4 y 5 respectivamente, 5 es el elemento máximo del conjunto que no tiene elemento mínimo.

Si en un conjunto ordenado existe un elemento mínimo, lo notaremos **0** y si tiene elemento máximo lo notaremos **1**.

## Ejercicios

*1. Determinar, en caso de que existan, el supremo, el ínfimo, el máximo o el mínimo para cada uno de los siguientes conjuntos:*

*a*. $[-3, 2]$ *b*. $(-6, 6)$ *c*. $\left(-\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\right)$

*d*. $(-\infty, 4)$ *e*. $[-3, \infty)$ *f*. $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in Z \text{ y } n \neq 0\right\}$

*g*. $B = \left\{x \in R : x = 0 \text{ o } x = \frac{1}{n}, n \in Z \text{ y } n \neq 0\right\}$

*h*. $C = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in N \text{ y } n \neq 0\right\}$ *i*. $D = \left\{1 - \frac{1}{n} : n \in N \text{ y } n \neq 0\right\}$

*j*. $E = \left\{(-1)^n \cdot \frac{1}{n} : n \in N \text{ y } n \neq 0\right\}$ *k*. $F = \left\{n + (-1)^n \cdot \frac{1}{n} : n \in N \text{ y } n \neq 0\right\}$

*l*. $G = \left\{(-1)^n n + \frac{1}{n} : n \in N \text{ y } n \neq 0\right\}$

*2. Si afirmamos que existe* *sup* A *para todo* $A \subseteq X$, *esto implica la existencia de un elemento máximo para* X, *el* *sup* X, *que ya hemos notado* **1** *¿Es cierto el recíproco?*

Si para todo B, subconjunto de un conjunto ordenado X, existe *inf* B y además existe **1**, entonces existe *sup* B para todo B, puesto que el conjunto CS(B) de las cotas superiores de B es no vacío (tiene por lo menos al **1**) y éste, es un subconjunto de X, por lo tanto existe *inf* CS(B) y éste es, por definición, *sup* B.

El hecho de que exista *sup* $(A \cup \{y\})$ es equivalente a la existencia de *sup* (*sup* A, *y*), para todo *y* en X, pero además, los dos son iguales, (*¿por qué*?); esto significa que, en el caso de existir, se cumple:

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$$

o sea que $\vee$ puede ser vista como una operación entre los elementos de un conjunto ordenado y la anterior igualdad significa que esta operación, en el caso de estar definida, para todo *x*, *y*, *z* en X es asociativa; además la existencia de *sup* A para cualquier subconjunto finito A de X es equivalente a la existencia de $x \vee y$ para cualquier par $x, y$ de sus elementos [8].

Otras definiciones útiles son las siguientes, pues nos permiten hablar del conjunto suma o del conjunto producto de un número real por un conjunto no vacío de números reales dado:

7. Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{R}$, ambos no vacíos y $\lambda$ un número real cualquiera, se define:

$$C = A + B = \{c \in \mathbb{R} : c = a + b \text{ donde } a \in A \text{ y } b \in B\}$$

$$\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$$

## 15.3.2. Axioma de Completez

Si $T$ es un subconjunto no vacío de números reales y está *acotado superiormente* entonces $T$ tiene *supremo*.

Este axioma es el que permite asegurar que $\sqrt{2}$ es un número real, pues el conjunto:

$$A = \{x \in Q : x^2 < 2\}$$

es acotado superiormente, luego debe existir un número real $y = \sup A$, este número es justamente $\sqrt{2}$.

Un conjunto con dos operaciones y una relación de orden que cumpla todas estas condiciones, se llama el conjunto de los Números Reales ($\mathbb{R}$), es ***un campo ordenado y completo***; de hecho, es el ***único*** conjunto con estas tres propiedades.

## 15.3.3. Teoremas

57. Si $r$ y $r_1$ son supremos de S, entonces $r = r_1$

*Prueba*

Por ser $r$ supremo y $r_1$ cota superior de S, tenemos que $r \leq r_1$. De manera análoga, por ser $r_1$ supremo y $r$ cota superior de S, afirmamos que $r_1 \leq r$; luego,

[8] ORTIZ, L., GÓMEZ, M., *Algebra abstracta*, Eafit, 1986.

como la relación "menor o igual que" es antisimétrica, deducimos que $r = r_1$, como se quería demostrar.

58. ***Propiedad arquimediana del conjunto de los números reales**:* Si $x$ es un número real tal que $x > 0$ y $y$ es un número real arbitrario, existe algún número natural $n$ tal que $xn > y$.

En términos geométricos lo aquí expuesto significa que todo segmento tan largo como se desee, sea éste $y$, puede ser recubierto por un número finito de segmentos ($n$) de longitud positiva dada ($x$), tan pequeña como se desee. En un dibujo, tenemos que:

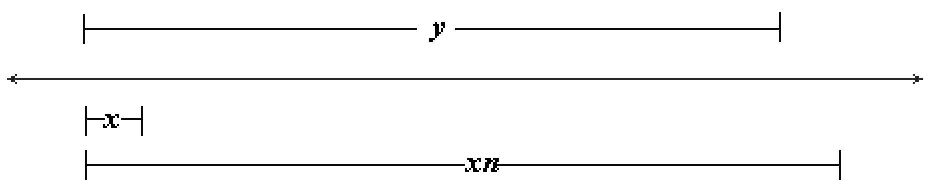


*Figura 1*

*Prueba*

Haremos esta prueba por contradicción; así, supongamos que $xn = y$ y definamos el conjunto X como sigue:

$$X = \{xn \text{ tales que } n \in \mathbb{N}\}$$

Como X es no vacío y está acotado superiormente, por $y$; según el axioma de completez, X tiene supremo, supongamos que éste es $w$.

Tenemos que $x > 0$; luego, $w - x < w$; por esto y por ser $w$ el supremo de X, $w - x$ no es cota superior de X, esto significa que existe al menos un elemento de X mayor que $w - x$, dicho elemento debe ser de la forma $x\, n_1$ donde $n_1$ es un número natural; esto es:

$$w - x < xn_1$$

lo que implica que

$$w < xn_1 + x$$

O de otra forma

$$w < x\,(n_1 + 1)$$

Pero $n_1 + 1$ es un número natural, luego $x\,(n_1 + 1)$ pertenece a X, con lo cual se contradice que $w$ sea el supremo de X.

59. El conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$) no está acotado superiormente.

*Prueba*

Supongamos que $\mathbb{N}$ está acotado superiormente y como $\mathbb{N}$ es no vacío, tenemos, por el axioma de completez, que $\mathbb{N}$ posee extremo superior, esto significa que existe $x$ en $\mathbb{R}$ tal que:

$$x = \text{Sup } \mathbb{N}$$

Por otro lado, tenemos que si $n$ es un número natural distinto de 0 ($n > 0$), por la propiedad arquimediana existe $m$ en los números naturales tal que $mn > x$, pero $mn$ es un número natural, lo que contradice que $x$ es el supremo. Por lo tanto $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente.

60. Para todo $x$ que pertenece al conjunto de los números reales, existe $a \in \mathbb{N}$, tal que $a > x$.

*Prueba*

Supongamos que para todo número natural $a$, se tiene $a = x$; esto significa $x$ es cota superior de $\mathbb{N}$, lo cual contradice el teorema anterior.

61. Si existe el *sup* A y el *sup* B, entonces, *sup* (A + B) = *sup* A + *sup* B.

*Prueba.*

Como el *sup* A y el *sup* B existen, tenemos que si $a$ y $b$ son elementos de A y de B, se cumple que:

$$sup\ A = a \quad (1)$$

$$sup\ B = b \quad (2)$$

Sumando (1) y (2), obtenemos:

$$sup\ A + sup\ B = a + b$$

Si hacemos $c = a + b$, tenemos que:

$$sup\ A + sup\ B = c \ (3)$$

Como estamos tomando $a$ y $b$ elementos arbitrarios de A y B, respectivamente, podemos formar:

$$\{c \in \mathbb{R}: c = a + b \text{ donde } a \in A \text{ y } b \in B\}$$

conjunto que corresponde a A + B y está acotado superiormente por *sup* A + *sup* B de acuerdo con (3), esto significa que, por el axioma de completez, A + B tiene supremo y que:

$$\textit{sup}\ A + \textit{sup}\ B = \textit{sup}\ (A + B) \qquad (4)$$

Ahora, según la definición de extremo superior, *sup* (A + B) = $a + b$, para todo $a + b$ en A + B, o lo que equivale a:

$$\textit{sup}\ (A + B) - b = a$$

es decir que *sup* (A + B) – $b$ es cota superior de A, pero *sup* A es la mínima, luego,

$$\textit{sup}\ A = \textit{sup}\ (A + B) - b$$

Así,

$$b = \textit{sup}\ (A + B) - \textit{sup}\ A$$

Por tanto, *sup* (A + B) – *sup* A es cota superior de B, pero como *sup* B existe, tenemos:

$$\textit{sup}\ B = \textit{sup}\ (A + B) - \textit{sup}\ A$$

O de otra manera:

$$\textit{sup}\ A + \textit{sup}\ B = \textit{sup}\ (A + B) \qquad (5)$$

Para que (4) y (5) sean ciertas, sólo tenemos una opción:

$$\textit{sup}\ A + \textit{sup}\ B = \textit{sup}\ (A + B)$$

Con lo que finalizamos nuestra demostración[9].

62. Si S es un subconjunto no vacío de números reales y $z > 0$, se tiene que:

a) Si S tiene supremo, sea éste *sup* S, entonces existe $s \in S$ tal que $s > \textit{sup}\ S - z$.

b) Si S tiene ínfimo, entonces existe $s \in S$ tal que $s < \textit{sup}\ S + z$

[9] Como vimos anteriormente los números irracionales aparecen como extremos superiores o inferiores de conjuntos de números racionales. Este teorema permite operacionalizar la suma de dos de ellos.

*Prueba.*

Esta prueba la hacemos por contradicción. Supongamos que para todo $s \in S$ se tiene

$$s \leq sup\ S - z$$

lo cual significa que $sup\ S - z$ es cota superior de S, pero si $sup\ S$ es el supremo de S, $sup\ S - z \geq sup\ S$, lo cual genera una contradicción con el teorema 53; en consecuencia Si S tiene supremo, entonces existe $s \in S$ tal que $s > sup\ S - z$.

La parte b) se hace por analogía a la parte a) antes desarrollada, por lo cual la dejamos como ejercicio para el lector interesado.

63. Si existe $sup\ A$ e $inf\ A$, se tiene que $sup\ (\lambda A) = \begin{cases} ?sup\ A, \text{si } ? \geq 0 \\ ?inf\ A, \text{si } ? \geq 0 \end{cases}$

*Prueba*

Para el caso $\lambda = 0$, la demostración es inmediata, entonces veamos qué sucede si $\lambda > 0$.

Como $sup\ A$ existe, tenemos que para todo $a \in A$, $sup\ A = a$. Si $\lambda > 0$, hacemos uso del teorema 43 y obtenemos:

$$\lambda sup\ A = \lambda a$$

Y en razón a que $\lambda a \in \lambda A$, tenemos que $\lambda sup\ A$ es cota superior de $\lambda A$.

Por otra parte, por el teorema anterior, decimos que si $z > 0$, existe $a_1 \in A$ tal que $sup\ A - z < a_1$ y como $a_1 = sup\ A$, tenemos:

$$sup\ A - z < a_1 = sup\ A$$

Si hacemos $s = \frac{e}{?}$, para cualquier $\varepsilon > 0$, la desigualdad anterior nos queda:

$$sup\ A - \frac{e}{?} < a_1 = sup\ A$$

Lo que es equivalente a:

$$\lambda sup\ A - \varepsilon < \lambda\ a_1 = \lambda sup\ A$$

Y como $\lambda a$ es un elemento de $\lambda A$ y $\lambda sup\ A - \varepsilon = \lambda sup\ A$, entonces $\lambda sup\ A$ es la máxima cota superior de $\lambda A$. Por tanto, $\lambda sup\ A = sup\ (\lambda A)$.

La demostración referente al ínfimo se hace de manera similar[10].

## Ejercicios

*Demostrar que*

*1. Si $x$ y $y$ son ínfimos de A entonces $x = y$*

*2. Si $n$ y $m$ son máximos de S, entonces $n = m$.*

*3. Si $s$ y $t$ son mínimos de S, entonces $s = t$.*

4. *Si X es un subconjunto no vacío de números reales y acotado inferiormente, entonces inf X existe.*

5. *Si $a, b$ son número reales y $a$ £ $b$ £ $a + \frac{b}{n}$ donde $n$ es un número entero positivo cualquiera, entonces $a = b$.*

6. *Si A y B son subconjuntos no vacíos de números reales, tales que, para todo $a$ Î A y para todo $b$ Î B, $a \leq b$, entonces sup A e inf B existen y sup A $\leq$ inf B.*

# Potenciación entre números reales

Intentemos ahora, definir la potenciación entre números reales; iniciemos con el caso en que *b* sea un número natural y como ya es habitual en N, definámosla por recurrencia mediante las fórmulas:

$$a^0 = 1 \text{ si } a \neq 0$$

y

$$a^{k^+} = a^k \times a$$

64. A diferencia de la multiplicación que es distributiva a izquierda y a derecha con respecto a la suma, la potenciación es *distributiva solamente a izquierda* con respecto a la multiplicación, es decir que

$$(a \times b)^k = a^k \times b^k$$

[10] Análogamente a lo dicho en el anterior, este teorema permite efectuar la multiplicación de números irracionales.

*Prueba*

Hagámosla por inducción sobre $k$

i) Si $k = 0$, entonces

$$(a\times b)^{o} = 1 = 1 \times 1 = a^{0}\times b^{0}$$

ii) Si $k = n$, para algún $n \in$ N, entonces; supongamos que:

$$(a\times b)^{n} = a^{n}\times b^{n} \qquad \text{por la hipótesis de inducción}$$

Veamos que para $k = n^{+}$, se cumple que:

$$(ab)^{n^{+}} = a^{n^{+}}\times b^{n^{+}}$$

| | |
|---|---|
| $(a\times b)^{n^{+}} = (a\times b)^{n}\times(a\times b)$ | por definición de potenciación |
| $= a^{n}\times b^{n}\times(a\times b)$ | por hipótesis de inducción |
| $= a^{n}\times a\times b^{n}\times b$ | por asociatividad y conmutatividad de la multiplicación en N. |
| $= a^{n^{+}}\times b^{n^{+}}$ | por definición de potenciación |

Luego $(a\times b)^{n^{+}} = a^{n^{+}}\times b^{n^{+}}$.

65. La operación potenciación también relaciona las operaciones de suma y multiplicación, de manera que:

$$a^{m+n} = a^{m}\times a^{n}$$

*Prueba*

De nuevo hagamos inducción, en este caso sobre $m$

i) Si $m = 0$, entonces

$$a^{o}\times a^{n} = 1\times a^{n} = a^{n} = a^{0+n}$$

ii) Si $m = k$, para algún $k \in$ N, entonces, supongamos que:

$$a^{k}\times a^{n} = a^{k+n} \qquad \text{por la hipótesis de inducción}$$

Veamos ahora que para $m = k^+$, se cumple que:

$$a^{k^+} \times a^n = a^{k^+ + n}$$

| | |
|---|---|
| $a^{k^+} \times a^n = a^k \times a \times a^n$ | por definición de potenciación |
| $= a^k \times a^n \times a$ | por asociatividad y conmutatividad de la multiplicación en N |
| $= a^{k+n} \times a$ | por la hipótesis de inducción |
| $= a^{(k+n)^+}$ | por la definición de potenciación |
| $= a^{k^+ + n}$ | por la definición de suma en N |

Luego $a^{k^+} \times a^n = a^{k^+ + n}$.

Veamos ahora cómo definir la potenciación entre números reales si $a$ es un número real cualquiera diferente de 0 y $b$ es un número entero negativo.

Si $b$ es un número entero negativo entonces, $-b = x$ es un número natural y estamos en el caso anterior, en este caso definimos

$$a^b = a^{-x} = (a^{-1})^x$$

donde $a^{-1}$ es el inverso multiplicativo de $a$.

Si $b$ es un número racional entonces, $b = \frac{m}{n}$, para algún par de números enteros $m$ y $n$; con $n \neq 0$, definimos

$$a^b = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

para todo $a \in R^+$.

66. También en este caso es válida la fórmula

$$(a \times b)^x = a^x \times b^x$$

cuando $a$ y $b$ son números reales positivos y $x$ es un número racional.

*Prueba*

Si $x = \frac{m}{n}$, $m, n \in Z$ y $n \neq 0$:

| | |
|---|---|
| $(ab)^{m/n} = \sqrt[n]{(ab)^m}$ | Por la definición de potenciación |
| $= \sqrt[n]{a^m b^m}$ | Por ser $m$ un número entero |
| $= \left(\sqrt[n]{a^m}\right)\left(\sqrt[n]{b^m}\right)$ | Por la propiedad distributiva de la radicación con respecto a la multiplicación entre números naturales |
| $= a^{m/n} b^{m/n}$ | Por definición de potenciación. |

por tanto

$$(a \times b)^x = a^x \times b^x .$$

67. **Ejercicio**: Si $a$ es un número real positivo y $x,\ y$ son números racionales entonces

$$i.\ a^x \times a^y = a^{x+y} .$$

$$ii.\ \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad \text{con } a \neq 0$$

$$iii.\quad (a^x)^y = a^{x \times y}$$

## Ejercicio adicional

2. *¿Cuál es el error en el siguiente procedimiento?*

*Si en la desigualdad*

$$1 < 2$$

*multiplicamos por* $\frac{1}{4}$, *obtenemos:*

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{2},$$

*o lo que es igual:*

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{1}{2}\right)$$

*si tomamos logaritmo en ambos lados de la desigualdad, tenemos que*

$$log_a\left(\frac{1}{2}\right)^2 < log_a\left(\frac{1}{2}\right).$$

*y puesto que*

$$log\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2\,log\left(\frac{1}{2}\right)$$

*si dividimos en ambos lados entre* $log\left(\frac{1}{2}\right)$, *concluimos que*

$$¡2 < 1!$$

Si $a$ es negativo, la potenciación puede no tener un resultado dentro de los números reales, en particular si $a = -1$ y $n$ es un número par.

El conjunto de los números donde estas operaciones son posibles es conocido como el conjunto de los *números complejos* y lo estudiaremos en otra ocasión.

El caso en el cual $b$ sea un número irracional, también lo dejamos de lado ya que es un tema que sería abordado de forma más adecuada con herramientas del cálculo, como las sucesiones de Cauchy y la noción de distancia.