Teorema 18

$\forall\ a\ , b\ \in R$ se tiene que, $-(a+b)=(-a)+(-b)$

Prueba

1.	$a+(-a)=0$	Por C3
2.	$b+(-b)=0$	Por C3
3.	$a+(-a)+b+(-b)=0$	Por C4
4.	$(a+b)+\big((-a)+(-b)\big)=0$	Por C2 y C5
5.	$-(a+b)=(-a)+(-b)$	Por T6

$q.e.d$

Recuerde que el inverso aditivo es único:

$$a\ +b\ =\ 0\ \rightarrow\ a\ =\ -b\ o-a\ =\ b$$

Teorema 19

$\forall\ a\ ,b\ \in R$ se tiene que, $\frac{1}{a\times b}=\frac{1}{a}\times\frac{1}{b}$

Prueba

1.	$1=1$	Por Identidad
2.	$1=1\times 1$	Por C8
3.	$(a\times b)\times\frac{1}{(a\times b)}=\left(a\times\frac{1}{a}\right)\times\left(b\times\frac{1}{b}\right)$	Por C7 y C9
4.	$(a\times b)\times\frac{1}{(a\times b)}=(a\times b)\times\left(\frac{1}{a}\times\frac{1}{b}\right)$	Por C7
5.	$\frac{1}{a\times b}=\frac{1}{a}\times\frac{1}{b}$	Por T3

$q.e.d$

Teorema 20

$\forall\, a\,, b\ \in R$ se tiene que, $(-a) \times b = -(a \times b)$

Prueba

1. $[(a) + (-a)] \times b = [(a) \times (b)] + [(-a) \times (b)]$ Por C11
2. $0 \times b = (a) \times (b) + [(-a) \times (b)]$ Por C4
3. $0 = (a \times b) + [(-a) \times (b)]$ Por T10
4. $(-a) \times (b) = -(a \times b)$ Por T6

$q.e.d$

Teorema 21

$\forall\ a\ ,b\ \in R$ se tiene que, $(-a) \times (-b) = (a \times b)$

Prueba

1.	$[(a) + (-a)] \times (-b) = [(a) \times (-b)] + [(-a) \times (-b)]$	Por C11
2.	$0 \times (-b) = (a) \times (-b) + [(-a) \times (-b)]$	Por C4
3.	$0 = [a \times (-b)] + [(-a) \times (-b)]$	Por T10
4.	$(-a) \times (-b) = -[-(a \times b)]$	Por T6
5.	$(-a) \times (-b) = (a \times b)$	Por T16

$q.e.d$

Teorema 22

$\forall\ a\ \in R$ se tiene que, $a - 0 = a$

Prueba

1. $a - 0 = a + (-0)$ Por Def. de Resta.
2. $(-0) + 0 = 0$ Por C4
3. $(-0) = 0$ Por C3
4. $a + (-0) = a + 0$ Por paso 1 y 3
5. $a + (-0) = a$ Por C3
6. $a - 0 = a$ Por Transitividad

$q.e.d$

Teorema 23

$\forall\, a \in R$ se tiene que, $a - a = 0$

Prueba

1.	$a - a = a - a$	Por Identidad.
2.	$a - a = a + (-a)$	Por Def. de Resta
3.	$a - a = 0$	Por C4

$q.e.d$

Teorema 24

$\forall\ a, b, c\ \in R$ se tiene que, $(a-b)+(b-c)=(a-c)$

Prueba

1.	$(a-b)+(b-c)=(a-b)+(b-c)$	Por Identidad.
2.	$(a-b)+(b-c)=\big(a+(-b)\big)+\big(b+(-c)\big)$	Por Def. de Resta
3.	$(a-b)+(b-c)=\big(a+(-c)\big)+\big(b+(-b)\big)$	Por C2
4.	$(a-b)+(b-c)=(a-c)+0$	Por Def. de Resta y C4
5.	$(a-b)+(b-c)=(a-c)$	Por C3

$q.e.d$

Teorema 25

$\forall\ a, b, c\ \in R$ se tiene que, $a \times (b - c) = (a \times b) - (a \times c)$

Prueba

1. $a \times (b - c) = a \times \big(b + (-c)\big)$ Por Def. de Resta
2. $a \times (b - c) = a \times b +\ [a \times (-c)]$ Por C11
3. $a \times (b - c) = a \times b +\ [-(a \times c)]$ Por T20
4. $a \times (b - c) = a \times b - a \times c$ Por Def. de Resta

$q.e.d$

Teorema 26

$\forall\ a, b \in R$ se tiene que, $a = b \leftrightarrow -a = -b$

Prueba

1.	$a = b$	Por Hipótesis
2.	$a + (-a) + (-b) = b + (-a) + (-b)$	Por C12
3.	$[a + (-a)] + (-b) = [b + (-b)] + (-a)$	Por C2 y C5
4.	$0 + (-b) = 0 + (-a)$	Por C4
5.	$(-b) = (-a)$	Por C3

$q.e.d$

Teorema 27

$\forall\ a \in R$ se tiene que, $-a = (-1) \times a$

Prueba

1. $-a = -a$ Por Identidad
2. $-a = -a \times 1$ Por C8
3. $-a = -(a \times 1)$ Por T20
4. $-a = -(1)(a)$ Por C5 y T20

$q.e.d$

Teorema 28

$\forall\, a, b \in R, \exists\, x \in R$ / si $\quad a + x = b \rightarrow x = b - a$

Prueba

1.	$a + x = b$	Por Hipótesis
2.	$a + x + (-a) = b + (-a)$	Por C12
3.	$[a + (-a)] + x = b - a$	Por C2 y Def. de Resta.
4.	$0 + x = b - a$	Por C4
5.	$x = b - a$	Por C3

$q.e.d$

Teorema 29

∀ $a, b \in R, \exists\, x \in R$ / si $a + x = b \rightarrow x = b - a$

Prueba

1. $a \times x = b$ Por Hipótesis
2. $a \times x + \frac{1}{a} = b \times \frac{1}{a}$ Por C12
3. $\left[a \times \frac{1}{a}\right] \times x = \frac{b}{a}$ Por C7 y Def. de División.
4. $1 \times x = \frac{b}{a}$ Por C9
5. $x = \frac{b}{a}$ Por C8

$q.e.d$

Teorema 30

$\forall\ a \in R$ Se tiene que si $a \neq 0 \rightarrow \frac{1}{a} \neq 0$

Prueba

Supongamos que: $\frac{1}{a} = 0$

1.	$\frac{1}{a} = 0$	Por Hipótesis
2.	$\frac{1}{a} \times a = 0 \times a$	Por C12
3.	$1 = 0$	Por C9 y T10.
4.	$\rightarrow\leftarrow$	Por T3

Por lo que concluimos que $\frac{1}{a} \neq 0$ $q.e.d$

Teorema 31a

$\forall\, a, b \in R$ Se tiene que si $a \neq 0\ y\ b \neq 0 \rightarrow a \times b \neq 0$

Prueba

Supongamos que: $a \times b\ = 0$

1.	$a \times b\ = 0$	Por Hipótesis
2.	$a \times b\ \times \frac{1}{a} \times \frac{1}{b} = 0 \times \frac{1}{a} \times \frac{1}{b}$	Por C12
3.	$\left(a \times \frac{1}{a}\right) \times \left(b\ \times \frac{1}{b}\right) = (0) \times \frac{1}{b}$	Por C7 y T10.
4.	$(1) \times (1) = 0$	Por C9 y T10.
5.	$1 = 0$	Por C8
6.	$\rightarrow\leftarrow$	Por T3

Por lo que concluimos que $a \times b\ \neq 0$ $\quad q.e.d$

Por una argucia, este teorema se puede escribir de otra manera:

Si $a \times b\ =\ 0 \quad \rightarrow \quad a\ =\ 0$ o $b\ =\ 0$

Teorema 31b

$\forall\, a, b \in R$ Se tiene que si $a \times b = 0 \rightarrow a = 0$ o $b = 0$

Prueba

Supongamos que: $a \times b = 0$

1. $a \times b = 0$ Por Hipótesis

2. $a \times b = 0 \times b$ Por T10

Si asumimos que $b \neq 0 \rightarrow \exists\ \frac{1}{b} \in R$

3. $a \times b \times \frac{1}{b} = 0 \times b \times \frac{1}{b}$ Por C12.

4. $a \times \left(b \times \frac{1}{b}\right) = 0 \times \left(b \times \frac{1}{b}\right)$ Por C7.

5. $a \times 1 = 0 \times 1$ Por C9

6. $a = 0$ Por C8 y T10

$q.e.d$