1.1 Números reales y sus propiedades

- **Los números naturales.**
- **Los números enteros.**
- **Los racionales y los irracionales.**

Hoy en día somos testigos del máximo desarrollo científico y tecnológico. Los aportes a las principales ciencias e ingenierías deben su considerable progreso a la aplicación directa del Cálculo Infinitesimal.

El estudio y solución de problemas clásicos como la velocidad de una partícula, la determinación de la recta tangente a una curva en un punto, la razón de cambio de una función, el área de una región y el volumen de un sólido han permitido el desarrollo del cálculo diferencial e integral.

En cualquier caso, el cálculo basa su desarrollo en el sistema de los números reales y por esta razón es necesario estudiar y conocer sus principales propiedades.

Iniciamos el estudio del conjunto de los números reales considerando sistemas numéricos más sencillos: los números naturales, los números enteros, los números racionales y los números irracionales.

Complicado entender el infinito

Existe una cantidad infinita numerable de números naturales, dentro de este conjunto, ¿qué hay más, números pares, números impares o los propios naturales? ¡Es posible demostrar que existe la misma cantidad de números pares, impares o naturales!

Los números naturales $\mathbb{N}$

Se define el conjunto de los *números naturales* como

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots\}$$

Desde siempre, la necesidad de contar ha estado presente en todas las culturas, la comparación entre conjuntos permitió conocer el tamaño de alguno de ellos. Pero los números naturales proporcionaron la manera precisa y contundente de contar. Entre las propiedades de los números naturales debemos mencionar que todos los números naturales tienen un sucesor que también es un número natural y que todos excepto el 1 tienen un antecesor que también es un número natural. Es decir

1. El primer elemento de los naturales es el 1.
2. Si $k \in \mathbb{N}$ se define su sucesor como $k + 1$ y además $k + 1 \in \mathbb{N}$.
3. Si $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 1$, se define su antecesor como $k - 1$ y además $k - 1 \in \mathbb{N}$.

Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo estudió en las Universidades de Berlín, Halle y Freiburg. Las materias que estudió fueron matemáticas, física y filosofía. Recibió clases de Frobenius, Planck, Schmidt y Schwarz.

En el conjunto $\mathbb{N}$ se definen dos operaciones básicas: la suma y el producto, las cuales son cerradas, conmutativas, asociativas y distributivas, además de existir el neutro de la multiplicación, sin embargo, los números naturales carecen de elementos neutros y de inversos aditivos.

Un conjunto que contiene a los números naturales y que resuelve este inconveniente es el conjunto de los números enteros.

La letra $\mathbb{Z}$ para denotar al conjunto de los números enteros se tomó en honor a Ernst Zermelo.

Los números enteros $\mathbb{Z}$

Se define el conjunto de los *números enteros* como

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Todo número natural es un número entero, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Alguna vez, el metro se definió como una diezmillonésima parte de la longitud del meridiano terrestre a lo largo de un cuadrante, este número no es un número entero, es un racional (o como comúnmente le llamamos en la educación básica: fracción o quebrado).

El símbolo $\mathbb{Q}$ se tomó originalmente de la palabra "Quotient".

Todo número entero a puede expresarse como el cociente $\frac{a}{1}$, de manera que todo número entero es un número racional, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Notación de los números decimales

El primero en utilizar una notación sistemática para expresar los números decimales fue el matemático flamenco Simon Stevin (1548-1620). No obstante, la versión actual de esta notación se debe a Willbord Suellius, quien vivió en los Países Bajos en el siglo XVII.

El papiro de Rhind

Las fracciones ya eran conocidas por los antiguos egipcios. Así lo atestigua un papiro de 3.700 años de antigüedad en el que se leía "AH, el total y su séptima parte hacen 19". Este importante vestigio histórico fue adquirido en 1858 en una tienda de Luxor por el anticuario escocés Henry Rhind.

En el conjunto de los números enteros también se definen las operaciones de suma y producto, que son cerradas, conmutativas, asociativas, distributivas y con elemento neutro multiplicativo. La "ventaja" sobre los naturales es la existencia del neutro aditivo y de los inversos aditivos, esto nos permite definir al "cero" y dar paso a la existencia de "números negativos". La resta de enteros se define como la suma de un número con el inverso de otro.

No obstante, los números enteros no se pueden utilizar para describir cómo se divide la unidad en dos partes, por ejemplo. Los números racionales hacen su aparición.

Los números racionales $\mathbb{Q}$

Se define el conjunto de los *números racionales* como

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

EJEMPLO 1 **Algunos números racionales son**

1. $\frac{3}{4}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{2}, 0$
2. Cualquier número natural.
3. Cualquier número entero.
4. Toda expansión decimal finita.
5. Toda expansión decimal infinita y periódica.

Los números racionales encuentran su origen como cocientes de números enteros. En $\mathbb{Q}$, además de cumplirse todas las propiedades de los enteros, se agrega la existencia de inversos multiplicativos para todos los números excepto el cero. Esto da origen a la operación de división como resultado de multiplicar un número por el inverso de otro no cero.

Como el resultado de dividir un número entero por el neutro multiplicativo 1 es el mismo número, se verifica que todo número entero es un número racional. Se cumple la contención propia $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Para todo número racional $\frac{p}{q}$ es posible realizar la división aritmética de p entre q, para obtener como resultado un numero decimal. El siguiente teorema presentado sin demostración expresa lo anterior.

TEOREMA 1.1

Todo número racional puede expresarse como una expansión decimal finita o como una expansión decimal infinita y periódica.

EJEMPLO 2 **Una expansión decimal finita es un número racional**

Demostrar que la expansión decimal 0.234 es un racional.

Solución Sea $x = 0.234$, entonces

$x = 0.234$ multiplicar por 10^3

$1000x = 234$ despejar

$$x = \frac{234}{1000}$$

Observación

En general, dada la expansión decimal finita $0.a_1a_2a_3\ldots a_n$ se supone

$x = 0.a_1a_2a_3\ldots a_n$	multiplicar por 10^n
$10^n x = a_1a_2a_3\ldots a_n$	despejar
$x = \dfrac{a_1a_2a_3\ldots a_n}{10^n}$	

EJEMPLO 3 **Una expansión decimal infinita pero periódica es un número racional**

Demostrar que la expansión decimal $0.369369369\ldots = 0.\overline{369}$ es un racional.

Solución Sea $x = 0.\overline{369} = 0.369369369369\ldots$, entonces

$x = 0.369369369369\ldots$	multiplicar por 10^3
$10^3 x = 369.369369369\ldots$	restar expresiones
$\begin{array}{r} 10^3 x = 369.369369369\ldots \\ x = 0.369369369369\ldots \\ \hline 999\,x = 369 \end{array}$	despejar
$x = \dfrac{369}{999}$	

Consideremos los siguientes problemas:

1. ¿Cuál es la solución de la ecuación $x^2 - 2 = 0$?
2. ¿Cuál es la razón entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro?
3. ¿Qué valor toma la función $(x + 1)^{1/x}$ para valores de x casi cero?

Se puede verificar que las respuestas son números que no pueden expresarse como el cociente de dos números enteros, porque no son números racionales.

La necesidad de los números irracionales se presentó en problemas de geometría de la antigua Grecia, sin embargo, fue hasta el siglo XIX que se mostraron avances significativos a través de los estudios realizados por Karl Weierstrass, George Cantor y Richard Dedekin. La construcción total se dio a partir de los axiomas que estableció Giuseppe Peano en 1889.

A pesar de que entre dos números racionales siempre existe otro número racional, existen "huecos" entre dos números racionales que no pueden determinarse, estos son los números irracionales. Se puede definir que los números irracionales son todos aquellos que no pueden expresarse como el cociente de dos enteros, o bien como aquellos números que tienen una expansión decimal *infinita y no periódica*.

Los números irracionales

Dados dos números racionales cualesquiera, siempre es posible hallar un nuevo número racional comprendido entre los dos; por ejemplo, entre m y n está el número racional $\frac{m+n}{2}$. Sin embargo, los números racionales no llenan toda la recta numérica. ¿Cómo se entiende esto? Basta con imaginar algunos números que, como π o la raíz cuadrada de 2, no pueden expresarse como fracciones. Los números de esta clase se llaman irracionales y se "intercalan" en la recta real en los huecos que existen entre los elementos del conjunto $\mathbb{Q}$.

Un número primo solo es divisible por él mismo y por la unidad, los primeros números primos son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 57, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97,…

Los números irracionales $\mathbb{I}$

Se define el conjunto de los *números irracionales* $\mathbb{I}$ como el conjunto de todos los números que no son racionales.

EJEMPLO 4 **Algunos números irracionales**

1. e
2. π
3. $\sqrt{p}$, si p es un número primo.

4. $\sqrt{p} + \sqrt{q}$, con p y q números primos.

5. $a + \sqrt{p}$, si a es un número racional y p un número primo.

Los números reales $\mathbb{R}$

La recta numérica se completa al unir los números racionales con los números irracionales, son conjuntos disjuntos y mutuamente excluyentes. Hemos llegado a la definición de número real.

> Se define el conjunto de los *números reales* como la unión de números racionales e irracionales
>
> $$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Se verifican las contenciones propias $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$.

1.2 Axiomas de los números reales

> Si existiera la división por 0…
>
> ¿En dónde está el error del siguiente desarrollo?
>
> Supongamos que a es un número real NO cero.
>
> Entonces sea
>
> $$a = b \neq 0$$
>
> Entonces
>
> $$a^2 = ab$$
>
> Restando b^2
>
> $$a^2 - b^2 = ab - b^2$$
>
> Factorizando
>
> $$(a + b)(a - b) = b\,(a - b)$$
>
> "Despejando"
>
> $$a + b = \frac{b(a - b)}{a - b}$$
>
> "Cancelando"
>
> $$a + b = b$$
>
> Y por el axioma 3, se tiene
>
> $$a = 0 \quad ¿?$$
>
> ¿Por qué?

- **Axiomas de los números reales, propiedades aritméticas.**
- **Axiomas de orden.**
- **Axioma de complitud o completitud.**

El sistema de los números reales es uno de los conceptos fundamentales de las matemáticas a cualquier nivel. Un estudio más profundo de este conjunto numérico queda fuera de esta obra y simplemente nos limitaremos a mencionar el conjunto de axiomas a partir de los cuales pueden derivarse las propiedades más conocidas de los números reales.

Propiedades aritméticas de los números reales

Se enuncian los siguientes axiomas a partir de los cuales se desarrolla toda la teoría de los números reales.

AXIOMAS DE LOS NÚMEROS REALES

Dados dos números reales cualesquiera a y b se define la suma $a + b \in \mathbb{R}$ y el producto $ab \in \mathbb{R}$, que satisfacen los siguientes axiomas.

Axioma 1. Propiedad conmutativa de la suma

$$a + b = b + a$$

Axioma 2. Propiedad asociativa de la suma

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

Axioma 3. Existencia del neutro aditivo

Existe el $0 \in \mathbb{R}$ tal que $a + 0 = a$

Axioma 4. Existencia de inversos aditivos

Para todo número real a existe $-a \in \mathbb{R}$, tal que $a + (-a) = 0$

Axioma 5. Propiedad conmutativa del producto

$$ab = ba$$

Axioma 6. Propiedad asociativa del producto

$$a(bc) = (ab)c$$

Axioma 7. Existencia del neutro multiplicativo

Existe el $1 \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot 1 = a$

Axioma 8. Existencia de inversos multiplicativos

Para todo número real $a \neq 0$ existe $a^{-1} \in \mathbb{R}$, tal que $a \cdot a^{-1} = 1$

Axioma 9. Propiedad distributiva

$$a(b + c) = ab + ac$$

Todas las propiedades conocidas de los números reales pueden demostrarse a partir de los anteriores axiomas, por esta razón se dice que la teoría de los números reales es una *teoría axiomática*.

Definición de resta y división de números reales

Se define la resta y la división de números reales como sigue

1. $a - b = a + (-b)$

2. $\dfrac{a}{b} = ab^{-1}$, siempre que $b \neq 0$

Subconjuntos de los números reales
Figura 1.1

EJEMPLO 1 Clasificar números reales

Determine cuáles números del conjunto

$$\left\{-13, -\sqrt{5}, -1, -\frac{1}{3}, 0, \frac{5}{8}, \sqrt{2}, \pi, 7\right\}$$

son (a) números naturales, (b) números enteros positivos, (c) números enteros, (d) números racionales y (e) números irracionales.

Solución

a. Números naturales: $\{7\}$

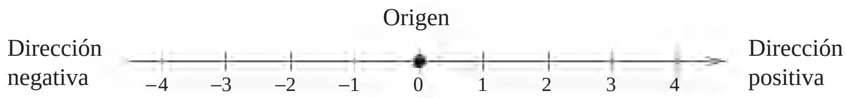
b. Números enteros positivos: $\{0, 7\}$

c. Números enteros: $\{-13, -1, 0, 7\}$

d. Números racionales: $\left\{-13, -1, -\frac{1}{3}, 0, \frac{5}{8}, 7\right\}$

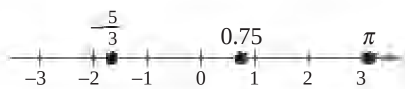
e. Números irracionales: $\left\{-\sqrt{5}, \sqrt{2}, \pi\right\}$

Los números reales se representan gráficamente sobre la **recta de números reales**. Al trazar un punto sobre la recta de números reales que corresponda a un número real, estamos **graficando** el número real. El punto 0 sobre la recta de números reales es el **origen**. Los números a la derecha del 0 son positivos y a la izquierda son negativos, como se ve en la figura 1.2. El término **no negativo** describe un número que es positivo o cero.

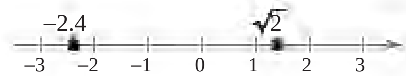


La recta de números reales
Figura 1.2

Como se ilustra en la figura 1.3, hay una correspondencia biunívoca entre números reales y puntos sobre la recta de números reales.



Todo número real corresponde exactamente a un punto sobre la recta de números reales.



Todo punto sobre la recta de números reales corresponde exactamente a un número real.

Figura 1.3

EJEMPLO 2 **Clasificar números reales**

Grafique los números reales sobre la recta de números reales.

a. $-\dfrac{7}{4}$

b. 2.3

c. $\dfrac{2}{3}$

d. -1.8

Solución Los cuatro puntos se muestran en la figura 1.4.

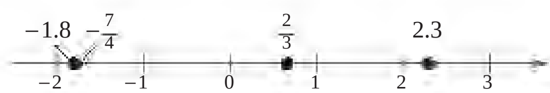


Figura 1.4

a. El punto que representa al número real $-\frac{7}{4} = -1.75$ se encuentra entre -2 y -1, pero más cercano a -2, en la recta de números reales.

b. El punto que representa al número real 2.3 se encuentra entre 2 y 3, pero más cercano a 2, en la recta de números reales.

c. El punto que representa al número real $\frac{2}{3} = 0.666\ldots$ se encuentra entre 0 y 1, pero más cercano a 1, en la recta de número reales

d. El punto que representa al número real -1.8 se encuentra entre -2 y -1, pero más cercano a -2, en la recta de números reales. Observe que el punto que representa a -1.8 está ligeramente a la izquierda del punto que representa a $-\frac{7}{4}$.

El orden en los números reales

Si a y b son dos números reales se dice que *a es menor que b* si y solo si la diferencia $b - a$ es un número real positivo, y se escribe

$$a < b \text{ si y solo si } 0 < b - a$$

De la misma manera se dice que un número *a es menor o igual que b* si y solo si la diferencia $b - a$ es un número real no negativo, esto es

$$a \leq b \text{ si y solo si } 0 \leq b - a$$

> En la recta real, la desigualdad $a < b$ se representa como un número a a la izquierda de un número b.

Finalmente se dice que los números a y b son iguales si la diferencia $a - b$ es cero, es decir

$$a = b \text{ si y solo si } b - a = 0$$

El orden natural en el conjunto de los números reales se basa en comparar a cada real con el cero y ubicarlo a la izquierda o derecha de él según corresponda. En la recta real, la desigualdad $a < b$ implica que el número a está a la izquierda del número b.

En los números reales la relación de orden $<$ satisface los siguientes axiomas.

AXIOMAS DE ORDEN EN $\mathbb{R}$

Sean $a, b \in \mathbb{R}$

Axioma 10. Ley de tricotomía

Se cumple una y solo una de las siguientes condiciones

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b$$

Nota: $a > b$ significa $b < a$

Axioma 11. Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$ para cualquier $c \in \mathbb{R}$

Axioma 12. Si $0 < a$ y $0 < b$ entonces $0 < ab$

Axioma 13. Propiedad de transitividad

Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$

Definición de los símbolos de desigualdad estricta < y >

Los símbolos $<$ y $>$ se conocen como símbolos de desigualdad estricta y se leen "menor que" y "mayor que" respectivamente.

Definición de los símbolos ≤ "menor o igual que" y ≥ "mayor o igual que"

Los símbolos $\leq$ y $\geq$ se conocen como símbolos de desigualdad no estricta y se leen "menor o igual que" y "mayor o igual que" respectivamente.

La expresión $a \leq b$ abrevia los casos $a < b$ o $a = b$.

La expresión $b \geq a$ abrevia los casos $b > a$ o $b = a$.

En el siguiente teorema se muestran otras propiedades de orden.

TEOREMA 1.2 Otras propiedades de orden

1. Si $a < b$ y $0 < c$ entonces $ac < bc$
2. Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $bc < ac$
3. Si $0 < a$ y $0 < b$ entonces $0 < a + b$
4. Si $0 < a < b$ y $0 < c < d$ entonces $a + c < b + d$
5. Si $0 < a < b$ y $0 < c < d$ entonces $ac < bd$

Ley de tricotomía

Dados números reales cualesquiera uno es mayor que otro o son iguales entre sí.

Los números reales son un conjunto ordenado.

Demostración (1)
Si $a < b$ entonces por el axioma 11

$a - a < b - a$ es decir $0 < b - a$, y si $0 < c$ por el axioma 12 se cumple

$0 < (b - a)c$, luego $0 < bc - ac$. De nueva cuenta por el axioma 11 tenemos

$ac < bc - ac + ac$, donde finalmente $ac < bc$

Demostración (2)
Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $0 < b - a$ y $0 < -c$ por el axioma 12 se cumple
$0 < (b - a)(-c)$, luego $0 < -bc + ac$. De nueva cuenta por el axioma 11 tenemos $bc < ac$.

Demostración (3)
Si $0 < a$ y $0 < b$ entonces por el axioma 11 si $0 < a$ y $0 + a < b + a$
Por tricotomía (axioma 10) se tiene $0 < a + b$.

Demostración (4)
Si $0 < a < b$ y $0 < c < d$ entonces $0 < b - a$ y $0 < d - c$, por el inciso (3) de este teorema se tiene $0 < (b - a) + (d - c)$, luego $0 < b + d - (a + c)$. Finalmente $a + c < b + d$.

Demostración (5)
Si $0 < a < b$ y $0 < c < d$ entonces $ac < bc$ y $bc < bd$. Por tricotomía se concluye la demostración.

Ínfimo y supremo

Antes de presentar el último axioma de los números reales consideremos las siguientes definiciones.

Definición de cota superior y cota inferior

Sea $A \subset \mathbb{R}$ entonces

1. Si existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $a < x$ para todo $a \in A$, entonces x se llama una *cota superior* de A y que el conjunto A está *acotado por arriba*.
2. Si existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x < a$ para todo $a \in A$, entonces x se llama una *cota inferior* de A y que el conjunto A está *acotado por abajo*.

El ínfimo y el supremo de un conjunto cuando existen son únicos.

Definición de supremo de un conjunto

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ acotado por arriba y supongamos que existe $a \in \mathbb{R}$ que satisface las siguientes dos condiciones

1. a es una cota superior de A.
2. Si $b \in \mathbb{R}$ es una cota superior de A entonces $a \leq b$.

Entonces a se dice el supremo de A y tiene la propiedad de ser "*la menor cota superior*".

Definición de ínfimo de un conjunto

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ acotado por abajo y supongamos que existe $a \in \mathbb{R}$ que satisface las siguientes dos condiciones

1. a es una cota inferior de A.
2. Si $c \in \mathbb{R}$ es una cota inferior de A entonces $c \leq a$.

Entonces a se dice el ínfimo de A y tiene la propiedad de ser "*la mayor cota inferior*".

Ahora sí, estamos en condiciones de enunciar un último axioma de los números reales, conocido como el axioma de *complitud* o de *completitud*.

> **Axioma 14.** Axioma de complitud o completitud
>
> **1.** Todo conjunto no vacío de números reales acotado por arriba tiene un supremo.
>
> **2.** Todo conjunto no vacío de números reales acotado por abajo tiene un ínfimo.

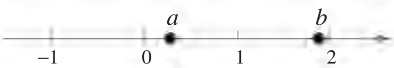
> Sin importar qué tan "cercanos" estén dos números reales, siempre será posible encontrar otro número real entre ellos.

Como un conjunto de números reales puede estar formado por un solo número real, entonces del axioma anterior se deduce que los reales son densos.

> El conjunto de los números reales es un conjunto denso.

La densidad de los números reales

Una propiedad importante de los números reales es que entre dos reales diferentes cualesquiera sin importar qué tan cercanos estén, siempre existe otro número real y como consecuencia, entre dos reales cualesquiera siempre existe una infinidad de números reales. En términos matemáticos decimos que el conjunto de los números reales es un conjunto *denso*.



$a < b$ si y solo si a está a la izquierda de b.
Figura 1.5

Geométricamente, se tiene que $a < b$ si y solo si a está a la izquierda de b en la recta de números reales, como se ve en la figura 1.5

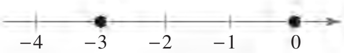


Figura 1.6

EJEMPLO 3 Orden de los números reales

Ponga el símbolo de desigualdad apropiado ($<$ o $>$) entre el par de números reales.

a. $-3, 0$ **b.** $-2, -4$ **c.** $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ **d.** $-\frac{1}{5}, -\frac{1}{2}$

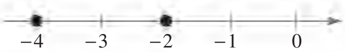


Figura 1.7

Solución

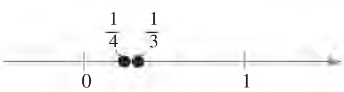


Figura 1.8

a. Como -3 está a la izquierda de 0 en la recta de números reales, como se ve en la figura 1.6, se puede decir que -3 es *menor que* 0, y escribimos $-3 < 0$.

b. Como -2 está a la derecha de -4 en la recta de números reales, como se ve en la figura 1.7, se puede decir que -2 es *mayor que* -4, y escribimos $-2 > -4$.

c. Como $\frac{1}{4}$ está a la izquierda de $\frac{1}{3}$ en la recta de números reales, como se ve en la figura 1.8, se puede decir que $\frac{1}{4}$ es *menor a* $\frac{1}{3}$, y escribimos $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$.

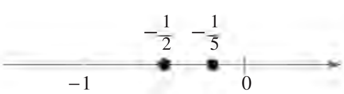


Figura 1.9

d. Como $-\frac{1}{5}$ está a la derecha de $-\frac{1}{2}$ en la recta de números reales, como se ve en la figura 1.9, se puede decir que $-\frac{1}{5}$ es *mayor que* $-\frac{1}{2}$, y escribimos $-\frac{1}{5} > -\frac{1}{2}$.

EJEMPLO 4 Orden de los números reales

Describa el subconjunto de números reales representado por cada desigualdad.

a. $x \leq 2$ **b.** $-2 \leq x < 3$

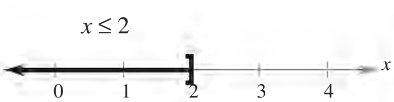


Figura 1.10

Solución

a. La desigualdad $x \leq 2$ denota todos los números reales menores o iguales a 2, como se ve en la figura 1.10.

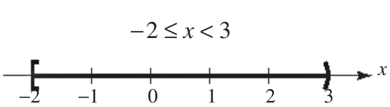


Figura 1.11

b. La desigualdad $-2 \leq x < 3$ significa que $x \geq -2$ y $x < 3$. Esta "doble desigualdad" denota todos los números reales entre -2 y 3, incluido -2 pero no 3, como se muestra en la figura 1.11.

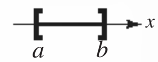
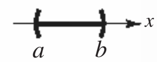
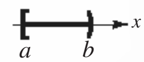
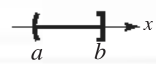
Intervalos en $\mathbb{R}$

Se pueden usar desigualdades para describir subconjuntos de números reales llamados **intervalos**. En los intervalos acotados a continuación, los números reales a y b son los puntos extremos de cada intervalo. Los puntos extremos de un intervalo cerrado están incluidos en él, en tanto que los puntos extremos de un intervalo abierto no están incluidos en él.

Tip de estudio

La razón por la que los cuatro tipos de intervalos de la derecha se llaman *acotados* es que cada uno tiene una longitud finita. Un intervalo que no tiene longitud finita es *no acotado* (vea abajo).

Intervalos acotados en la recta de números reales

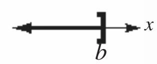
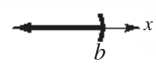
Notación	*Tipo de intervalo*	*Desigualdad*	*Gráfica*
$[a, b]$	Cerrado	$a \leq x \leq b$	
(a, b)	Abierto	$a < x < b$	
$[a, b)$	Mixto	$a \leq x < b$	
$(a, b]$	Mixto	$a < x \leq b$	

Los símbolos ∞, **infinito positivo**, y $-\infty$, **infinito negativo**, no representan números reales. Simplemente son símbolos prácticos que se utilizan para describir lo ilimitado de un intervalo como $(1, \infty)$ o $(-\infty, 3]$.

ATENCIÓN

Siempre que escribamos un intervalo que contenga ∞ o $-\infty$ usamos invariablemente un paréntesis y nunca corchetes. Esto es porque ∞ y $-\infty$ nunca son puntos extremos de un intervalo y, por tanto, no están incluidos en él.

Intervalos no acotados (infinitos) en la recta de números reales

Notación	*Tipo de intervalo*	*Desigualdad*	*Gráfica*
$[a, \infty)$	Infinito	$x \geq a$	
(a, ∞)	Infinito	$x > a$	
$(-\infty, b]$	Infinito	$x \leq b$	
$(-\infty, b)$	Infinito	$x < b$	
$(-\infty, \infty)$	Toda la recta real	$-\infty < x < \infty$	

EJEMPLO 5 Usar desigualdades para representar intervalos

Use notación de desigualdades para describir cada uno de lo siguiente.

a. c es como máximo 2. **b.** m es al menos -3. **c.** Toda x en el intervalo $(-3, 5]$

Solución

a. El enunciado "c es a lo más 2" puede representarse con $c \leq 2$.

b. El enunciado "m es al menos -3" puede representarse con $m \geq -3$.

c. "Toda x en el intervalo $(-3, 5]$" puede representarse con $-3 < x \leq 5$.

EJEMPLO 6 Interpretar intervalos

Dé una descripción verbal de cada uno de los intervalos siguientes.

a. $(-1, 0)$ **b.** $[2, \infty)$ **c.** $(-\infty, 0)$

Algunos autores denotan los extremos de un intervalo abierto con puntos "huecos" y los extremos de un intervalo cerrado con puntos "rellenos".

Solución

a. Este intervalo está formado por todos los números reales que sean mayores a -1 y menores que 0.

b. Este intervalo está formado por todos los números reales que sean mayores o iguales a 2.

c. Este intervalo está formado por todos los números reales negativos.

Como conjuntos de números reales, los intervalos se pueden operar con el álgebra de conjuntos estándar. Esto es, es posible realizar operaciones de unión, intersección, complemento, diferencia, etcétera.

EJEMPLO 7 Operaciones con intervalos

Determine el conjunto de números reales definido por $(-1, 6] \cap [2, 10)$ y por $(-1, 6] \cup [2, 10)$.

Solución

Los intervalos son conjuntos, de manera que, utilizando operaciones de conjuntos se tiene:

$$(-1, 6] \cap [2, 10) = \{x \mid -1 < x \leq 6\} \cap \{x \mid 2 \leq x < 10\} = \{x \mid 2 \leq x \leq 6\} = [2, 6]$$

$$(-1, 6] \cup [2, 10) = \{x \mid -1 < x \leq 6\} \cup \{x \mid 2 \leq x < 10\} = \{x \mid -1 < x < 10\} = (-1, 10)$$

1.2 Ejercicios

Consulte **CalcChat.com** para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

VOCABULARIO Llene los espacios en blanco.

1. Un número real es ________ si se puede escribir como la razón $\frac{p}{q}$ entre dos enteros, donde $q \neq 0$.
2. Los números ________ tienen representaciones decimales no periódicas infinitas.
3. El punto 0 sobre la recta de números reales se llama ________.
4. La distancia entre el origen y un punto que represente un número real en la recta de números reales es el ________ ________ de los números reales.
5. Un número real que se pueda escribir como el producto de dos o más números primos se llama número ________.
6. Un entero que tenga exactamente dos factores positivos, el entero mismo y 1, se llama número ________.
7. Una expresión algebraica es un conjunto de letras llamadas ________ y números reales llamados ________.
8. Los ________ de una expresión algebraica son aquellas partes separadas por adición.
9. El factor numérico de un término variable es el ________ del término variable.
10. La ________ ________ ________ ________ dice que si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los ejercicios 11-16, determine cuáles números del conjunto son (a) números naturales, (b) números enteros, (c) enteros (neg. y pos.), (d) números racionales y (e) números irracionales.

11. $\left\{-9, -\frac{7}{2}, 5, \frac{2}{3}, \sqrt{2}, 0, 1, -4, 2, -11\right\}$
12. $\left\{\sqrt{5}, -7, -\frac{7}{3}, 0, 3.12, \frac{5}{4}, -3, 12, 5\right\}$
13. $\{2.01, 0.666\ .\ .\ .\ , -13, 0.010110111\ .\ .\ .\ , 1, -6\}$