1. CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

Ya conoces las operaciones de adición y multiplicación en el conjunto de los números racionales y también sus propiedades. En el caso de números irracionales, tomaremos aproximaciones decimales de estos números y operaremos con ellas. Es decir, las reduciremos a operaciones con números racionales.

Adición de números reales	Multiplicación de números reales
Para sumar dos números reales, sumamos las sucesivas aproximaciones decimales del mismo orden. $\sqrt{3} = 1.732\ 050\ 80...$; $\sqrt{8} = 2.828\ 427\ 12...$ $1.732\ 0 < \sqrt{3} < 1.732\ 1$ $+\ 2.828\ 4 < \sqrt{8} < 2.828\ 5$ $4.560\ 4 < \sqrt{3} + \sqrt{8} < 4.560\ 6$ El número real suma de $\sqrt{3} + \sqrt{8}$ es: $\sqrt{3} + \sqrt{8} \approx 4.560\ 5$	Para multiplicar dos números reales multiplicamos las sucesivas aproximaciones decimales del mismo orden. $\sqrt{6} = 2{,}449\ 489\ 74...$; $\pi = 3{,}141\ 592\ 65...$ $2{,}449\ 4 < \sqrt{6} < 2{,}449\ 5$ $\times\ 3{,}141\ 5 < \pi < 3{,}141\ 6$ $7{,}694\ 790\ 1 < \sqrt{6} \cdot \pi < 7{,}695\ 349\ 2$ El número real suma de $\sqrt{6} \cdot \pi$ es: $\sqrt{6} \cdot \pi = 7{,}694\ 795$
Observa que solo son correctas tres de las cuatro cifras decimales obtenidas al sumar las aproximaciones. Si queremos obtener la suma con un determinado orden de aproximación, debemos tomar algún orden más en los sumandos.	En este caso, solo podemos asegurar las dos primeras cifras decimales del producto. Como en la adición, si queremos obtener el producto con un determinado orden de aproximación, debemos tomar algún orden más en los factores.

Tabla 1

1.1 Propiedades de los números reales

Como la adición y la multiplicación de números reales consisten en sumar y multiplicar aproximaciones decimales, que son números racionales, las propiedades en $\mathbb{R}$ son las mismas que en $\mathbb{Q}$.

Se cumple: $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}$

Adición	Multiplicación
Asociativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$	Elemento neutro: $a\ 1 = 1\ a = a$
Elemento neutro: $a + 0 = 0 + a = a$	Asociativa: $a\ (b\ c) = (a\ b)\ c$
Elemento opuesto: $a + (-a) = (-a) + a = 0$	Elemento inverso: $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$
Conmutativa: $a + b = b + a$	Conmutativa: $a \cdot b = b \cdot a$
Distributiva de la multiplicación respecto de la adición: $a\ (b + c) = a\ b + a\ c$	

Tabla 2

Por cumplirse estas propiedades, decimos que el conjunto $\mathbb{R}$ con las operaciones de adición y multiplicación tiene estructura de cuerpo conmutativo.

Y TAMBIÉN: ¿?

Sustracción y división de números reales

- La resta de dos números reales la obtenemos al sumar al minuendo el opuesto del sustraendo.

$$a - b = a + (-b)$$

- El cociente de dos números reales lo obtenemos al multiplicar uno de ellos por el inverso del otro (siempre que éste sea diferente de cero).

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} \qquad (b \neq 0)$$

1.2. Propiedades de orden de los números reales

Hemos visto que los números reales pueden representarse sobre la recta.

Esta representación permite establecer un orden en el conjunto $\mathbb{R}$.

Dados dos números reales, **a** y **b**, decimos que a es menor que **b** y escribimos a < **b** si, al representarlos sobre la recta real, **a** queda situado a la izquierda de **b**..

A partir de la relación <, podemos definir las restantes relaciones:

$a \leq b \leftrightarrow a < b \text{ o } a = b \qquad a > b \leftrightarrow b < a \qquad a \geq b \leftrightarrow b < a \text{ o } b = a$

De estas definiciones deducimos las siguientes propiedades:

- Propiedad reflexiva: $a \leq a$
- Propiedad antisimétrica: $a \leq b$ y $b \leq a \leftrightarrow a = b$
- Propiedad transitiva: $a \leq b$ y $b \leq c \rightarrow a \leq c$
- Propiedad de orden total: $a \leq b$ o $b \leq a$

Y TAMBIÉN: ¿?

El signo $\leftrightarrow$ se lee si, y sólo si, y significa que las expresiones que aparecen a ambos lados son equivalentes.

Análogamente, podemos definir la relación de orden en sentido contrario, es decir: $b > a$ si la representación de **b** en la recta está a la derecha de la de **a** o si $b - a > 0$.

Por último, enunciamos dos propiedades que tienen que ver con las operaciones y las desigualdades:

Si sumamos un mismo número a los dos miembros de una desigualdad, esta se mantiene:

$$\text{si } a \leq b \Leftrightarrow a \pm c \leq b \pm c$$

Si se multiplican o dividimos los dos miembros de una desigualdad por un mismo número real, se mantiene el sentido de la desigualdad si el número es positivo, y se invierte el sentido si es negativo:

$$\text{si } a \leq b \text{ y } c \Leftrightarrow 0\ 1\ c \cdot a \leq c \cdot b$$

$$\text{si } a \leq b \text{ y } c \Leftrightarrow 0\ 1\ c \cdot a \geq c \cdot b$$

Actividades

1. **Representa** gráficamente de forma geométrica sobre la recta real los números $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ y $\sqrt{8}$
2. **Representa** gráficamente sobre la recta real los números siguientes: $-\sqrt{3}$, $2\sqrt{5}$, $-3\sqrt{6}$
3. Al determinar el valor de $\sqrt{10}$ con la calculadora obtenemos el siguiente número: 3,16227766....
Representa sobre la recta este número de manera aproximada.
4. **Ordena** los números reales de cada par.
a) $-\sqrt{3}$ y $-\frac{1}{2}$ b) π y $3{,}1\widehat{4}$ c) π y $\sqrt{11}$
5. **Representa** sobre la recta real y ordena de menor a mayor los números siguientes:
$\sqrt{2}$; $\frac{-1}{3}$; 0 ; 3,1514 ; $-\sqrt{3}$; π
6. **Ordena** de menor a mayor el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas si x es un número real mayor que 1.
$\frac{2}{5}x$; x; $x \cdot 10^{-2}$; 0,3 x ; $-\frac{1}{5}x$; $\frac{4x}{9}$

1.3. Potenciación de números reales con exponente entero

Sabemos que el producto de varios números racionales iguales puede expresarse como una potencia de base racional.

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

La potencia de base a, es un número real y su exponente es un número natural n, la potencia es el producto del número a por sí mismo, n veces.

$$\underbrace{a^n = a\cdot a\cdot a\ldots a}_{n\ veces}$$

$$\frac{a^6}{a^5}=\frac{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}=a^1$$

Pero, ¿qué sucede si el exponente de una potencia es 1? En tal caso no podemos aplicar la definición de potencia, ya que no existen productos con un único factor. En este caso se toma como valor de la potencia la propia base. Así, por ejemplo, $\pi^1 = \pi$.

$$\frac{a^{n+1}}{a^n}=a^1 \qquad n\in\mathbb{N}, a\in\mathbb{R}$$

Las operaciones con potencias de base real y exponente natural tienen las mismas propiedades que las de base racional.

Consideremos seguidamente el caso en que el exponente sea un número entero.

Las potencias de base real y exponente entero positivo son justamente las potencias de base real y exponente natural. Pero ¿qué ocurre si el exponente es 0 o un número entero negativo?

A las potencias de exponente 0 o un número entero negativo las definimos de manera que las propiedades de las potencias de exponente natural continúen siendo válidas, en particular la propiedad de la división de potencias de la misma base.

Potencias de exponente 0	**Potencias de exponente negativo**
• Consideramos la división $\pi^4 : \pi^4$. $\pi^4 : \pi^4 \rightarrow \frac{\pi\cdot\pi\cdot\pi\cdot\pi}{\pi\cdot\pi\cdot\pi\cdot\pi}=1 \rightarrow \boxed{\pi^0 = 1}$ Si aplicásemos la regla para dividir potencias $\rightarrow \pi^{4-4}=\pi^0 \rightarrow \boxed{\pi^0 = 1}$ La potencia de base número real a, a ≠ 0, y exponente 0 es igual a 1. $a^0 = 1$, con $a \neq 0$	• Consideramos la división $\pi^3 : \pi^5$. $\pi^3 : \pi^5 \rightarrow \frac{\pi\cdot\pi\cdot\pi\cdot\pi}{\pi\cdot\pi\cdot\pi\cdot\pi}=\frac{1}{\pi\cdot\pi}=\frac{1}{\pi^2} \rightarrow \boxed{\pi^{-2}=\frac{1}{\pi^2}}$ Si aplicásemos la regla para dividir- potencias $\rightarrow \pi^{3-5}=\pi^{-2} \rightarrow \boxed{\pi^{-2}=\frac{1}{\pi^2}}$ La potencia de base número real a, a ≠ 0, y exponente un número entero negativo - es igual al inverso de la potencia de base a y exponente positivo. $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

Tabla 3

1.4. Raíz enésima de un número real

Los radicales están estrechamente relacionados con las potencias. En este apartado veremos cómo se relacionan y aprenderemos a trabajar con expresiones en las que aparecen radicales o potencias de exponente racional.

Las raíces cuadradas de un número real b son los números reales + a y − a si y solo si: $(+a)^2 = b$ y $(-a)^2 = b$. Se expresa: $b = \pm a$.

Observa que b debe ser un número real mayor o igual que 0, ya que es una potencia par de + a y de - a. De este modo:

Si el radicando es positivo...	Si el radicando es negativo ...
Existen dos raíces cuadradas que son dos números reales opuestos. $\sqrt{25} = \pm 5$	No existe ninguna raíz cuadrada real. $\sqrt{-3} = ?$

Tabla 4

También conviene observar que si b es un número racional, su raíz cuadrada puede ser un número racional o irracional.

Si el radicando es un racional cuadrado perfecto...	Si el radicando no es un racional cuadrado perfecto...
La raíz cuadrada es un número racional. $\sqrt{\frac{9}{16}} = \pm\frac{3}{4}$	La raíz cuadrada es un número irracional. $\sqrt{\frac{2}{3}}$

Tabla 5

A las raíces de índice diferente de 2 las definimos de forma parecida a las raíces cuadradas.

Por ejemplo, el número 125 es el resultado de elevar al cubo el número 5. Así, el número 5 es la raíz cúbica de 125. Y el número -125 es el resultado de elevar al cubo el número -5. Así, el número -5 es la raíz cúbica de -125.

b es la raíz enésima de a, es decir, $b=\sqrt[n]{a}$, si y solo si $b^n = a$, donde a, b son reales y n es un natural mayor que 1

$$b=\sqrt[n]{a} \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[n]{\ } \text{ es el signo radical.} \\ n \text{ es el índice del radical.} \\ a \text{ es el radicando.} \\ b \text{ es la raíz.} \end{array} \right.$$

TIC

Si accedes a la página **http://www.josemariabea.com/index.php/tecnicasde-calculo-mental/5-raices-cuadradas**, encontrarás una estrategia para calcular mentalmente raíces cuadradas de números entre 1 y 1 000. Observarás que el resultado que obtienes es aproximado, pero se va acercando más al resultado real cuanto mayor es el número.

Actividades

7. **Señala** en cuáles de las fracciones siguientes el numerador y el denominador son cuadrados perfectos.

$$\frac{125}{4};\ \frac{9}{16};\ \frac{99}{35};\ \frac{16}{25};\ \frac{111}{38};\ \frac{169}{81}$$

   a. **Escribe** las raíces cuadradas de todas las fracciones.

   b. **Clasifica** las raíces obtenidas en números racionales y números irracionales.

1.5. Radicales, signos y radicales semejantes

Signo de la raíz

Para averiguar cuál será el signo de la raíz, observaremos el signo del radicando y la paridad del índice. **Fíjate** en la siguiente tabla:

Raíz	$\sqrt[3]{343} = 7$	$\sqrt[3]{-343} = -7$	$\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{\pm 2}{3}$	$\sqrt[4]{\frac{-16}{81}} = ?$
Paridad del índice	Impar	Impar	Par	Par
Signo del radicando	+	-	+	-
Número de raíces	Una (positiva)	Una (negativa)	Dos (positiva y negativa)	No tiene

Tabla 6

TIC

Si accedes a la página http://descartes.cnice.mec.es/edad/4esomatematicasB/radicales/quincena2_contenidos_1f.htm, podrás comprobar, mediante diferentes ejemplos, si dos radicales son semejantes o no.

Podemos concluir:

- Si el índice es impar, la raíz tiene el mismo signo que el radicando.
- Si el índice es par y el radicando es positivo, existen dos raíces que son dos números reales opuestos.
- Si el índice es par y el radicando es negativo, no existe ninguna raíz real.

Expresiones radicales semejantes

Observa el resultado de la siguiente suma: $\sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{5} = 4 \cdot \sqrt{5}$

El número 4 es el coeficiente. En general, en una expresión de la forma $a \cdot \sqrt[n]{b}$ llamamos coeficiente al número a que multiplica al radical.

Observa las expresiones siguientes: $3 \cdot \sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$, $12 \cdot \sqrt{5}$. En todos los casos tenemos un coeficiente que multiplica a un mismo radical.

Dos expresiones radicales de la forma $a \cdot \sqrt[n]{b}$ y $c \cdot \sqrt[n]{b}$ son semejantes si tienen el mismo índice y el mismo radicando.

Actividades

8. **Indica** el signo de las raíces de estos números reales y **efectúalas** si es posible.

$$\sqrt{\frac{11}{13}}, \sqrt[4]{-\frac{11}{13}}, \sqrt[3]{-\frac{27}{64}}, \sqrt[3]{\frac{3}{24}}, \sqrt[8]{-\frac{108}{172}}, \sqrt[3]{-\frac{111}{333}}, \sqrt[4]{-\frac{625}{81}}, \sqrt{\frac{1\,052}{4\,208}}, \sqrt[5]{\frac{1}{2}}$$

9. **Agrupa** las expresiones radicales semejantes.

$4\sqrt[3]{2}$; $-2\sqrt{5}$; $6\sqrt{5}$; $7\sqrt[4]{3}$; $-6\sqrt[3]{2}$

1.6. Operaciones con radicales

Podemos multiplicar, dividir, elevar a una potencia o extraer la raíz de cualquier radical. Sin embargo, para sumar o restar dos radicales, estos deben ser semejantes.

Suma y resta de radicales

La suma o resta de radicales semejantes es otro radical semejante a los dados, cuyo coeficiente es igual a la suma o resta de los coeficientes de los radicales sumandos.

$$a \cdot \sqrt[n]{b} + c \cdot \sqrt[n]{b} = (a + c) \cdot \sqrt[n]{b}$$

Ejemplo 1

Calcula:

a. $-\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 8\sqrt{2}$

b. $7\sqrt{5} - 6\sqrt{3} + 8\sqrt{5} - 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$

c. $12\sqrt{7} - 8\sqrt{7} + 9\sqrt{7}$

Desarrollo:

a. $-\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = (-1 + 3 - 4 + 8) \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

b. $7\sqrt{5} - 6\sqrt{3} + 8\sqrt{5} - 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = (7 + 8)\ \sqrt{5} + (-6 - 3 - 4)\ \sqrt{3} = 15\sqrt{5} - 13\sqrt{3}$

c. $12\sqrt{7} - 8\sqrt{7} + 9\sqrt{7} = (12 - 8 + 9) \cdot \sqrt{7} = 13\sqrt{7}$

Multiplicación de radicales

El producto de radicales del mismo índice es igual a otro radical con igual índice cuyo coeficiente y cuyo radicando son iguales, respectivamente, a los productos de los coeficientes y los radicandos de los factores.

$$a\sqrt[n]{b} \cdot c\sqrt[n]{d} = a \cdot c\sqrt[n]{b \cdot d}$$

División de radicales

El cociente de dos radicales del mismo índice es igual a otro radical con igual índice cuyo coeficiente y cuyo radicando son iguales, respectivamente, al cociente de los coeficientes y los radicandos de los radicales dividendo y divisor.

$$\frac{a\sqrt[n]{b}}{c\sqrt[n]{b}} = \frac{a}{c}\sqrt[n]{\frac{b}{d}}$$

Actividades

10. **Efectúa.**

a. $-2\sqrt{7} + 5\sqrt{7} - 8\sqrt{7} + 3\sqrt{7} - 5\sqrt{7} + 7\sqrt{7}$

b. $\frac{1}{3\sqrt{2}} - 2\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - \frac{1}{6\sqrt{2}}$

c. $5\sqrt{11} - 3\sqrt{17} - 4\sqrt{11} - 9\sqrt{11} + 8\sqrt{17}$

11. **Expresa** como la raíz de un cociente:

$$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}};\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2b}};\ \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{16c}};\ \frac{\sqrt{12a}}{\sqrt{3a}}$$

Ejemplo 2

Calcula.

a. $2\sqrt{\frac{1}{4}}\cdot 7\sqrt{3}$ b. $\dfrac{5\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$ c. $\dfrac{6\sqrt{5}\cdot 6\sqrt{5}}{8\sqrt{5}}$

Solución:

a. $2\sqrt{\frac{1}{4}}\cdot 7\sqrt{3} = 2\cdot 7\cdot\sqrt{\frac{1}{4}\cdot 3} = 14\cdot\sqrt{\frac{3}{4}}$

b. $\dfrac{5\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = \dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{5}{4}\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

c. $\dfrac{6\sqrt{5}\cdot 6\sqrt{5}}{8\sqrt{5}} = \dfrac{6\cdot 6}{8}\sqrt{5} = \dfrac{9}{2}\sqrt{5}$

Potencia de un radical

La potencia de un radical es igual a otro radical cuyo coeficiente y cuyo radicando están elevados a dicha potencia.

$$(a\sqrt[n]{b})^m = a^m\cdot\sqrt[n]{b^m}$$

Raíz de un radical

La raíz de un radical es otro radical cuyo radicando es el mismo y cuyo índice es el producto de los índices de las raíces.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$$

Ejemplo 3

Calcula.

a. $(2\sqrt{7})^5$

b. $\sqrt{\sqrt[3]{48}}$

c. $\sqrt{\sqrt{3}}$

Solución:

a. $(2\sqrt{7})^5 = 2^5\cdot(\sqrt{7})^5 = 2^5\sqrt{7^5}$

b. $\sqrt{\sqrt[3]{48}} = \sqrt[2\cdot 3]{48} = \sqrt[6]{48}$

c. $\sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt[2\cdot 2]{3} = \sqrt[4]{3}$

Actividades

12. **Di** si son ciertas o falsas las siguientes igualdades:

a. $\sqrt{8\cdot a} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{a}$

b. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

c. $\sqrt{81} = \sqrt{3}\,\sqrt{27} = 3\cdot\sqrt{27}$

d. $\sqrt{93^3} = \sqrt[3]{93}$

e. $\sqrt{\sqrt{81}} = 3$

f. $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

13. **Calcula.**

$\sqrt{\sqrt{625}}$; $\left(\sqrt{5}\right)^2$; $\left(\sqrt{\dfrac{12}{7}}\right)^4$; $\sqrt{\sqrt{16}}$

1.7. Operaciones combinadas

También podemos encontrar series de operaciones combinadas en las que aparezcan radicales. Para resolverlas tendremos en cuenta el orden de prioridad de las operaciones que ya conoces.

Ejemplo 4

Calcula.

a. $\sqrt{2}\,(3 - 4\sqrt{5}) = 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\cdot\sqrt{5} = 3\sqrt{2} - 4\sqrt{10}$

Aplicamos la propiedad distributiva.

b. $(2 + 3\sqrt{2}) \cdot (5 - \sqrt{2}) = 2\,(5 - \sqrt{2}) + 3\sqrt{2}\,(5 - \sqrt{2}) = 2 \cdot 5 - 2\sqrt{2} + 3 \cdot 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\sqrt{2}$

$= 10 - 2\sqrt{2} + 15\sqrt{2} - 6 = 4 + 13\sqrt{2}$

Agrupamos términos semejantes.

c. $(2 + \sqrt{3})^2 = (2 + \sqrt{3})\,(2 + \sqrt{3}) = 2\,(2 + \sqrt{3}) + \sqrt{3}\,(2 + \sqrt{3}) = 4 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + \sqrt{3}\sqrt{3} = 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\sqrt{3}$

d. $(6 + \sqrt{2})\cdot(6 - \sqrt{2}) = 6\,(6 - \sqrt{2}) + \sqrt{2}\,(6 - \sqrt{2}) = 36 - 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - \sqrt{2}\sqrt{2} = 36 - 2 = 34$

Observa que el último resultado no tiene radicales. Esto se debe a que es el producto de la suma de dos números por su diferencia, que da como resultado la diferencia de los cuadrados: $(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$. Y esto, en el caso de una raíz cuadrada, conlleva la eliminación de la raíz. También se podía haber resuelto de esta manera:

$$(6 + \sqrt{2}) \cdot (6 - \sqrt{2}) = 6^2 - (\sqrt{2}\,)^2 = 36 - 2 = 34$$

Decimos que una suma de radicales y su diferencia son expresiones conjugadas.

Así, $a + b$ es la expresión conjugada de $a - b$ y, recíprocamente, $a - b$ es la expresión conjugada de $a + b$.

Al multiplicar dos expresiones conjugadas desaparecen las raíces cuadradas que pudieran existir.

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$$

Y TAMBIÉN:

La expresión conjugada de $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ es $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

Actividades

14. **Efectúa.**

a. $(2 + \sqrt{7}) \cdot \sqrt{3}$ b. $\sqrt{11}\cdot(\sqrt{11} + \sqrt{3})$ c. $\sqrt{7}\cdot(9 + \sqrt{2})$ d. $\sqrt{5}\cdot(3 + \sqrt{5})$

15. **Calcula.**

a. $(11 + \sqrt{2})^2$ b. $\left(\sqrt{6} - \sqrt{5}\right)^2$ c. $\left(\sqrt{10} - \sqrt{17}\right)\cdot\left(\sqrt{10} + \sqrt{17}\right)$ d. $\left(7 - \sqrt{21}\right)\cdot\left(7 + \sqrt{21}\right)$

16. **Escribe** la expresión conjugada de cada una de estas expresiones:

$$2 + \sqrt{3}\ ;\ 3 - 5\sqrt{2}\ ;\ 1 - \sqrt{2}\ ;\ \sqrt{3} - 5$$

—**Multiplica** cada expresión por su conjugada.

Y TAMBIÉN: ¿?

Entre dos números racionales cualesquiera hay infinitos números racionales.
Cuando un conjunto cumple esta propiedad, decimos que es denso.

1.8. Potenciación de números reales con exponente racional

A las potencias de exponente racional las definimos mediante radicales del modo siguiente.

La potencia de base un número real a y de exponente un número racional m/n se define como la raíz de índice n y radicando a^m.

Así, observamos que los radicales pueden expresarse como potencias de exponente racional y viceversa. En los siguientes ejemplos, aprenderemos cómo se transforman mutuamente unos en otros.

Y TAMBIÉN: ¿?

Propiedades de las operaciones con potencias de exponente entero

- Multiplicación de potencias de la misma base
  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- División de potencias de la misma base
  $a^m : a^n = a^{m-n} \quad (a > 0)$
- Potencia de un producto
  $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- Potencia de una potencia
  $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Ejemplo 5

Expresa como potencias de exponente racional.

a. $\sqrt[3]{-12}$ b. $\sqrt[5]{\left(\frac{3}{5}\right)^4}$

Apliquemos la definición.

a. $\sqrt[3]{-12} = (-12)^{\frac{1}{3}}$ b. $\sqrt[5]{\left(\frac{3}{5}\right)^4} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{4}{5}}$

Ejemplo 6

Expresa en forma de radical.

a. $124^{\frac{1}{4}}$ b. $\left(-\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$

Apliquemos la definición.

a. $124^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{124}$ b. $\left(-\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{1}{25}}$

A las potencias de exponente racional las definimos de manera que las propiedades de las potencias de exponente entero continúen siendo válidas. Así, para operar con potencias de exponente racional, aplicaremos las propiedades que se recogen al margen. **Fíjate** en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 7

Calcula:

a. $(2+a)^3 \cdot (2+a)^{\frac{1}{4}} \cdot (2+a)^{\frac{3}{2}}$

b. $(-4-2\sqrt{3})^{\frac{3}{2}} : (-4-2\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}$

c. $(-9 \cdot a \cdot b2)^{\frac{3}{11}}$

d. $\left[\left(\frac{\pi}{7}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{5}{4}}$

Apliquemos las propiedades de las operaciones con potencias.

a. $(2+a)^3 \cdot (2+a)^{\frac{1}{4}} \cdot (2+a)^{\frac{3}{2}} = (2+a)^{3+\frac{1}{4}+\frac{3}{2}} = (2+a)^{\frac{19}{4}}$

b. $(-4-2\sqrt{3})^{\frac{3}{2}} : (-4-2\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} = (-4-2\sqrt{3})^{\frac{3}{2}-\frac{1}{3}} = (-4-2\sqrt{3})^{\frac{7}{6}}$

c. $(-9 \cdot a \cdot b2)^{\frac{3}{11}} = (-9)^{\frac{3}{11}} \cdot a^{\frac{3}{11}} \cdot b^{2 \cdot \frac{3}{11}} = (-9)^{\frac{3}{11}} \cdot a^{\frac{3}{11}} \cdot b^{\frac{6}{11}}$

d. $\left[\left(\frac{\pi}{7}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{5}{4}} = \left(\frac{\pi}{7}\right)^{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}} = \left(\frac{\pi}{7}\right)^{\frac{15}{8}}$

Las potencias de exponente racional y negativo pueden transformarse en potencias de exponente positivo, como en el caso de potencias de exponente entero. Para ello, tendremos en cuenta que una potencia de exponente negativo es igual al inverso de la potencia de la misma base con exponente positivo.

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

Fíjate en cómo expresamos con exponente positivo estas potencias:

$$5^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{5^{\frac{1}{3}}} \quad ; \quad \left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{5}{6}}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{5}{6}}$$

El siguiente cuadro, recoge las propiedades de las operaciones con potencias de base real y exponente racional, a las cuales añadimos esta última, relativa a las potencias de exponente negativo

Potencias de base real y exponente racional

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$$

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} \quad (\text{con } a \neq 0)$$

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$$

$$(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

Tabla 7

Y TAMBIÉN: ¿?

Una potencia de base real y exponente entero negativo es igual al inverso de la potencia de la misma base con exponente positivo.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Y TAMBIÉN: ¿?

La potenciación y la radicación son operaciones inversas.

$$\sqrt{a^2} = a$$

Lo cual podemos demostrar al aplicar las propiedades de las operaciones con potencias de exponente racional.

$$\sqrt{a^2} = (a^2)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}2} = a^1 = a$$

CALCULADORA

Las teclas para el cálculo de raíces suelen ser:

[$\sqrt{\ }$] Para el cálculo de la raíz cuadrada.

[$\sqrt[3]{\ }$] Para el cálculo de la raíz cúbica.

[$\sqrt[x]{\ }$] Para el cálculo de cualquier raíz de índice x.

Así, para calcular $\sqrt{144}$ efectuamos: [1] [4] [4] [$\sqrt{\ }$] [=] 12

Para calcular $\sqrt[3]{125}$: [1] [2] [5] [$\sqrt[3]{\ }$] [=] 5

Y, para calcular $\sqrt[7]{245}$: [2] [4] [5] [$\sqrt[x]{\ }$] [7] [=] 2.1943679

1. **Halla** con tu calculadora: $\sqrt[7]{245}$; $\sqrt[3]{64}$; $\sqrt{1\,250}$; $\sqrt[6]{654}$

2. **Utiliza** la calculadora para hallar:

$$\sqrt{576};\ \sqrt[5]{75};\ \sqrt[7]{124};\ \sqrt[3]{1\,250};\ \sqrt[3]{\frac{1}{81}};\ \sqrt{\frac{32}{75}};\ \sqrt[3]{\frac{12}{56}}$$

Actividades

17. **Di** cuáles de las siguientes igualdades son ciertas y cuáles no:

a. $(-3 + 2\sqrt{7})^{\frac{5}{3}} = \dfrac{1}{(-3 + 2\sqrt{7})^3}$

b. $(25 \cdot a \cdot b^3)^{\frac{5}{4}} = \dfrac{1}{(25 \cdot a \cdot b^3)}$

c. $(-6 - a)^{-\frac{2}{3}} = \left[(-6 - a)^{\frac{2}{3}}\right]^{-1}$

d. $a^{\frac{-1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{-1}{4}\cdot\frac{1}{3}}$

La transformación de raíces en potencias puede ser muy útil a la hora de efectuar operaciones con radicales. A estas la podemos resolver por los procedimientos ya vistos al estudiar las operaciones con radicales o bien, transformando los radicales en potencias de exponente racional y aplicando sus propiedades.

Comprobemos estas dos formas de proceder en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8

Resolvamos:

$$\frac{\sqrt{3^3}\cdot\sqrt[4]{5^5}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{2^3}\cdot\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt[4]{5}}$$

Primera resolución

Apliquemos las propiedades de las operaciones radicales.

$$\frac{\sqrt{3^3}\cdot\sqrt[4]{5^5}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{2^3}\cdot\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt[4]{5}}=\frac{\sqrt{3^3}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt[4]{5^5}}{\sqrt[4]{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt[5]{2^3}}=$$

Apliquemos los radicales semejantes.

$$\sqrt{\frac{3^3}{3}}\cdot\sqrt[4]{\frac{5^5}{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{2^3\cdot 2^2}}=\sqrt{3^2}\cdot\sqrt[4]{5^4}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{2^5}}=$$

$$=3\cdot 5\cdot\frac{1}{2}=\frac{15}{2}$$

Segunda resolución

Apliquemos las propiedades de las operaciones con potencias.

$$\frac{\sqrt{3^3}\cdot\sqrt[4]{5^5}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{2^3}\cdot\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt[4]{5}}=3^{\frac{3}{2}}\cdot 5^{\frac{5}{4}}\cdot 3^{\frac{-1}{2}}\cdot 2^{\frac{-3}{5}}\cdot 2^{\frac{-2}{5}}\cdot 5^{\frac{-1}{4}}=$$

$$=3^{\frac{3}{2}}\cdot 3^{\frac{-1}{2}}\cdot 5^{\frac{5}{4}}\cdot 5^{\frac{-1}{4}}\cdot 2^{\frac{-3}{5}}\cdot 2^{\frac{-2}{5}}=$$

Apliquemos las potencias de la misma base.

$$=3^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{5}{4}-\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{-3}{5}-\frac{2}{5}}=3\cdot 5\cdot 2^{-1}=\frac{15}{2}$$

Actividades

18. **Expresa** en forma de radical. A continuación, **di** cuáles son semejantes.

$$(-3)^{\frac{1}{3}}\ ;\ 4^{\frac{1}{5}};\ (-7)^{\frac{1}{3}}\ ;\ 9^{\frac{1}{6}}\ ;\ 25^{\frac{1}{4}}\ ;\ 4\cdot 9^{\frac{1}{6}};\ 2\ \ (-3)^{\frac{1}{3}}$$

19. El número $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ puede expresarse en forma de potencia de exponente negativo como $2^{-\frac{1}{3}}$. **Expresa** de la misma forma:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}};\ \frac{1}{\sqrt[5]{2}};\ \frac{1}{\sqrt[4]{5}};\ \frac{2}{\sqrt[3]{9}};\ \frac{-2}{\sqrt[6]{3}}$$

20. **Expresa** en forma de una sola potencia:

a. $\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{5}}$

b. $\left(\frac{-3}{4}\right)^{4}\cdot\left(\frac{-3}{4}\right)^{\frac{-2}{5}}\cdot\left(\frac{-3}{4}\right)$

c. $\left[(1+\sqrt{2})^{3}\right]^{\frac{3}{5}}:(1+\sqrt{2})^{\frac{-1}{2}}$

d. $\left(\frac{-1}{5}\right)^{-7}:\left(\frac{-1}{5}\right)^{-7}$