Conceptos Introductorios

Análisis Vectorial: Es la rama de la matemática que estudia las propiedades y reglas para el uso de los vectores.

Vector: Es un elemento matemático formado por un segmento de recta orientada, y que es utilizada para representar gráficamente a una magnitud vectorial.

Magnitud Vectorial: Es aquella magnitud que para ser determinada se necesita conocer su valor numérico, su unidad física, la dirección y el sentido. Por ejemplo, la fuerza.

Elementos de un Vector

a) Punto de Aplicación: Es el origen del vector.

b) Intensidad, Módulo o Magnitud: Es el valor del vector.

c) Dirección: Está dada por la línea de acción del vector, o por una recta paralela a ésta.

d) Sentido: Es la orientación del vector. Para una dirección hay dos posibles sentidos, los cuales son opuestos.

Notaciones:

$\bar{x} = \vec{x} = x\angle\theta$; *Se lee vector x.*

$|\bar{x}| = |\vec{x}| = x$; *Se lee módulo del vector x.*

Tipos de Vectores

a) **Vectores Colineales:** Son aquellos vectores que actúan en una misma línea de acción.

b) **Vectores Iguales:** Son aquellos vectores que tienen el mismo módulo, dirección y sentido.

c) **Vector Opuesto:** El vector opuesto, de determinado vector, es aquel que tiene el mismo módulo y dirección que éste, pero con sentido opuesto.

d) **Vectores Concurrentes:** Son aquellos vectores cuyas líneas de acción se intersectan en un único punto.

e) **Vectores Coplanares:** Son los vectores que están ubicados en un mismo plano.

f) **Vectores Equivalentes:** Son aquellos que en determinado aspecto producen el mismo efecto.

Adición de Vectores

Es representar a todos los vectores con uno solo que produzca el mismo efecto que todos juntos.

Métodos Gráficos: Los siguientes métodos son válidos para vectores concurrentes y coplanares. Los vectores deben de tener como punto en común su origen; en su defecto, se deslizan los vectores, por sus respectivas líneas de acción, para lograrlo.

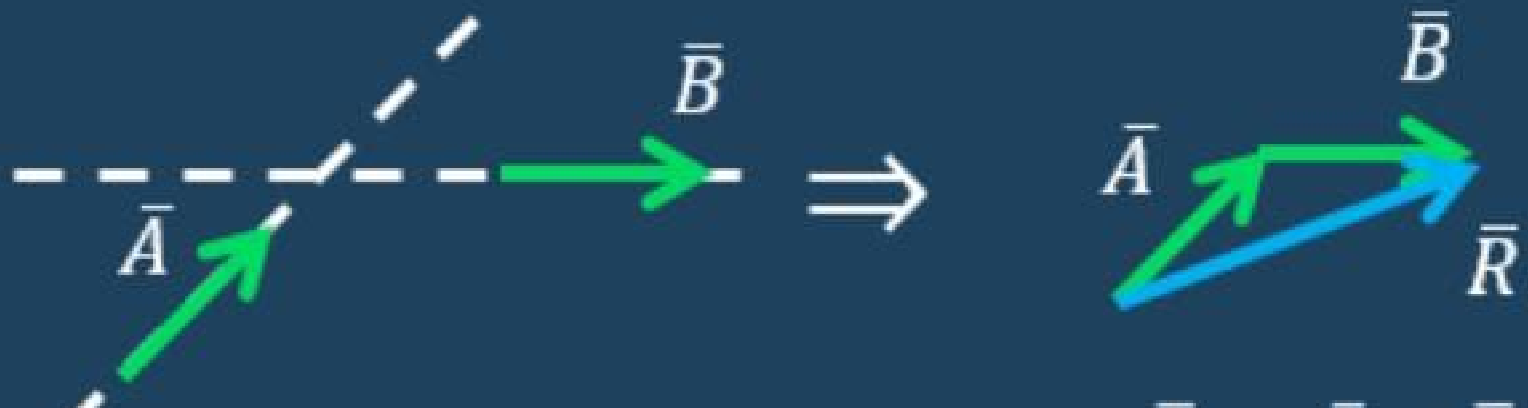
a) Método del Triángulo: Es un método para dos vectores, que consiste en unir los vectores uno a continuación del otro. El vector resultante inicia en el origen del primer vector, y se extiende hasta el final del segundo vector.

b) Método del Paralelogramo: Es un método para dos vectores, que consiste en unir los vectores por el origen; para luego, trazar en los extremos de cada vector una recta paralela respecto del otro vector. El vector resultante tendrá como origen el punto en común entre los dos vectores, y se extenderá hasta la intersección de las rectas.

c) Método del Polígono: Es un método similar al Método del Triángulo, pero aplicable para varios vectores. Consiste en unir los vectores, uno a continuación del otro. El vector resultante inicia en el origen del primer vector y se extiende hasta el extremo libre del último vector, formándose así un polígono.

Métodos Gráficos de Suma de Vectores

Método del Triángulo



$$\bar{R} = \bar{A} + \bar{B}$$

Método del Polígono

$$\bar{R} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$$

Método del Paralelogramo

$$\bar{R} = \bar{A} + \bar{B}$$

Adición de Vectores

Método Analítico: Relaciona, mediante la siguiente fórmula, el módulo del vector resultante con los módulos de los vectores a sumar, y el ángulo formado por éstos. Esta fórmula es válida para dos vectores concurrentes y coplanares.

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$

Donde:

R: *Es el módulo del vector resultante* $\bar{R}$.

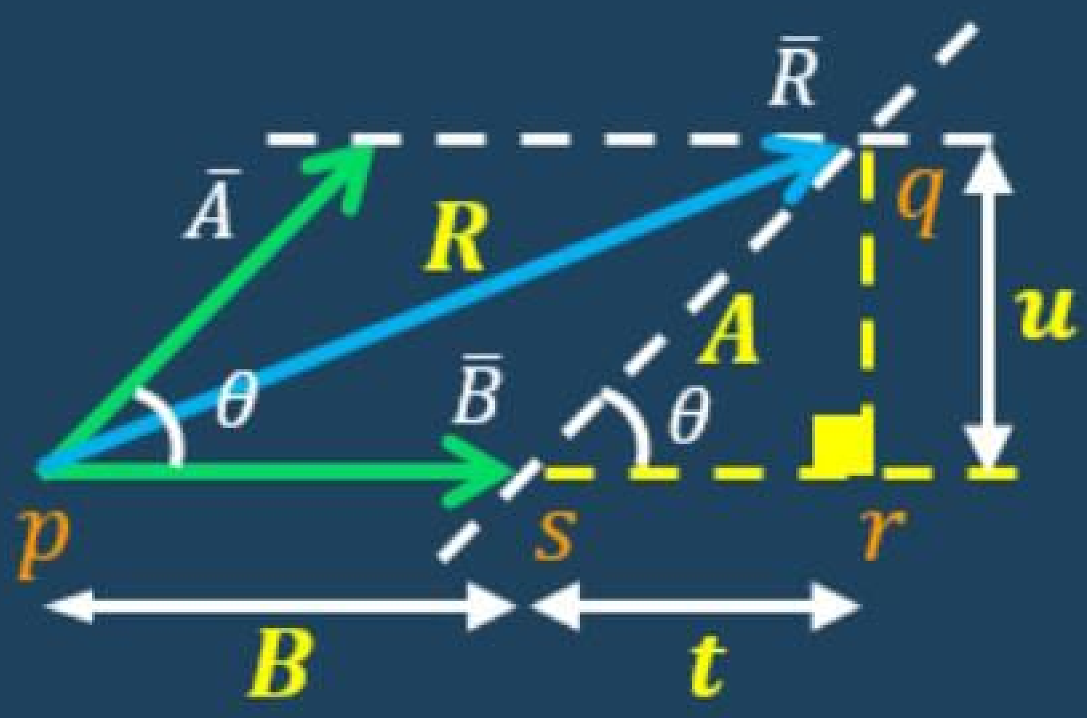
A: *Es el módulo del vector* $\bar{A}$.

B: *Es el módulo del vector* $\bar{B}$.

θ: *Es el ángulo formado por los vectores* $\bar{A}$ *y* $\bar{B}$.

Demostración de la Fórmula:

Comenzamos graficando el Método del Paralelogramo. Luego, proyectamos la altura "qr", desde el punto "q" hasta el punto "r", sobre la proyección del vector $\bar{B}$.



$En\ el\ triángulo\ formado, sqr, asignamos\ al\ lado$ "qr" $la\ variable$ "u"; $y\ al\ lado$ "sr", $la\ variable$ "t", $Además, notamos\ que\ el\ lado$ "sq" $es\ paralelo\ al\ vector\ \bar{A}; por\ ello, el\ ángulo\ qsr\ es\ \theta.$

$Luego, en\ el\ triángulo$ "pqr", $tenemos\ por\ el\ Teorema\ de\ Pitágoras, la\ siguiente\ ecuación:$

$$R^2 = (B+t)^2 + u^2 \qquad (ec. 1)$$

$Luego, en\ el\ triángulo$ "sqr", $tenemos\ las\ siguientes\ \ relaciones:$

$$t = A\cos\theta \qquad (ec. 2)$$

$$u = A\operatorname{sen}\theta \qquad (ec. 3)$$

$Después, introducimos\ las\ ecuaciones\ 2\ y\ 3\ en\ la\ 1, y\ despejamos\ la\ ecuación.$

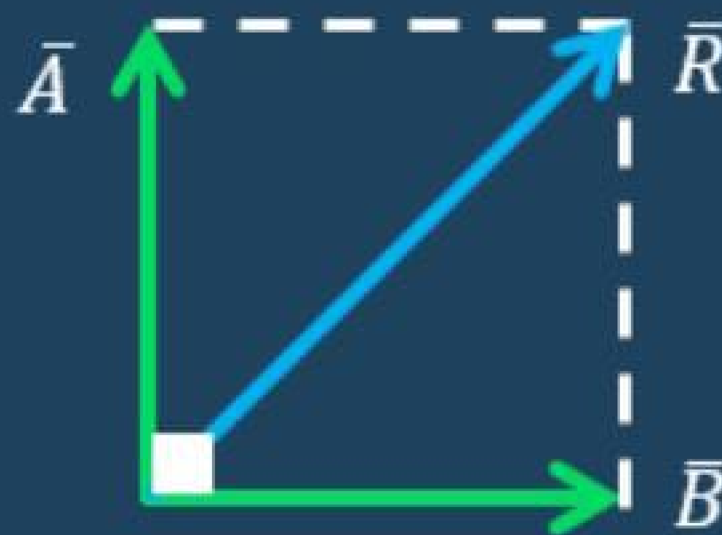
$$R^2 = (B + A\cos\theta)^2 + (A\operatorname{sen}\theta)^2$$

$$R^2 = B^2 + 2AB\cos\theta + A^2\left(\operatorname{sen}\theta^2 + \cos\theta^2\right)$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta^2}\ ; \operatorname{sen}\theta^2 + \cos\theta^2 = 1$$

Caso cuando los vectores forman un $\angle$ recto:

$\theta = 90°$



$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$

$\cos\theta = \cos 90 = 0$

$\boldsymbol{R = \sqrt{A^2 + B^2}}$

Caso cuando los vectores son colineales

***a) Resultante Máxima:* Si los vectores tienen el mismo sentido.**

$\theta = 0°$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$

$$\cos\theta = \cos 0 = 1$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB}$$

$$\boldsymbol{R = A + B}$$

***a) Resultante Mínima:* Si los vectores tienen sentidos opuestos.**

$\theta = 180°$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$

$$\cos\theta = \cos 180 = -1$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB}$$

$$\boldsymbol{R = A - B}$$

Sustracción de Vectores

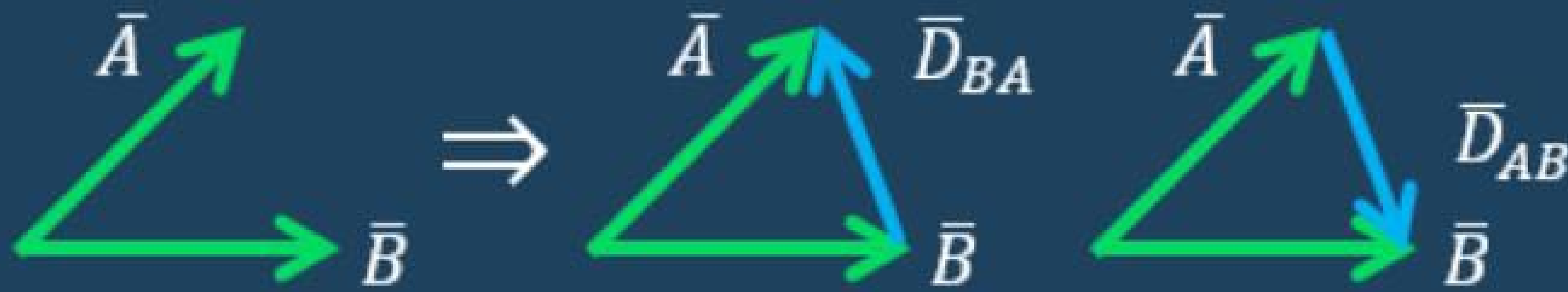
Métodos Gráficos: Los siguientes métodos son válidos para vectores concurrentes y coplanares. Los vectores deben de tener como punto en común su origen; en su defecto, se deslizan los vectores, por sus respectivas líneas de acción, para lograrlo.

a) Método del Triángulo: Consiste en formar el vector diferencia, uniendo los extremos libres de los vectores, partiendo desde el vector (a sustraer) con signo negativo.

b) Método del Paralelogramo: Consiste en invertir el sentido del vector con signo negativo; y luego, sumar los vectores por el Método del Paralelogramo.

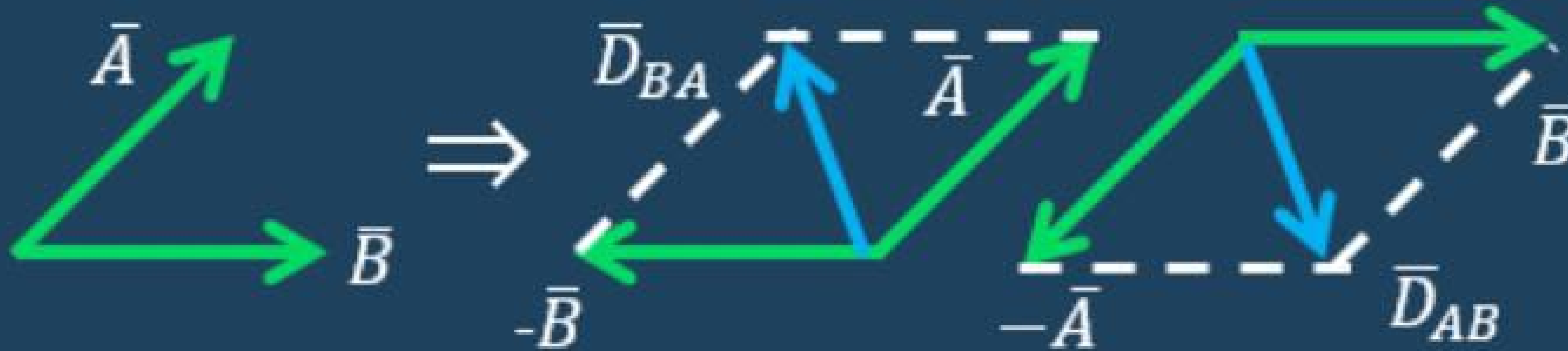
Métodos Gráficos de Resta de Vectores

Sustracción por el Método del Triángulo



$\overline{\boldsymbol{A}} - \overline{\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{D}}_{\boldsymbol{BA}}$ $\quad$ $\overline{\boldsymbol{B}} - \overline{\boldsymbol{A}} = \overline{\boldsymbol{D}}_{\boldsymbol{AB}}$

Sustracción por el Método del Paralelogramo



$\overline{\boldsymbol{A}} - \overline{\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{D}}_{\boldsymbol{BA}}$ $\quad$ $\overline{\boldsymbol{B}} - \overline{\boldsymbol{A}} = \overline{\boldsymbol{D}}_{\boldsymbol{AB}}$

Sustracción de Vectores

Los siguientes métodos son válidos para vectores concurrentes y coplanares. Los vectores deben de tener como punto en común su origen; en su defecto, se deslizan los vectores, por sus respectivas líneas de acción, para lograrlo.

Método Analítico: La demostración de la siguiente fórmula consiste en invertir el sentido del vector (a sustraer) con signo negativo, originándose un nuevo ángulo entre los vectores. Este nuevo ángulo (180-θ) es el suplemento del inicial (θ). Luego, sumamos los vectores por el método analítico, considerando el nuevo ángulo. La fórmula del módulo del vector resultante ha sido demostrada anteriormente, por lo que partimos de ella para obtener el módulo del vector diferencia.

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$$

Donde:

D: *Es el módulo del vector diferencia* $\overline{D}$.

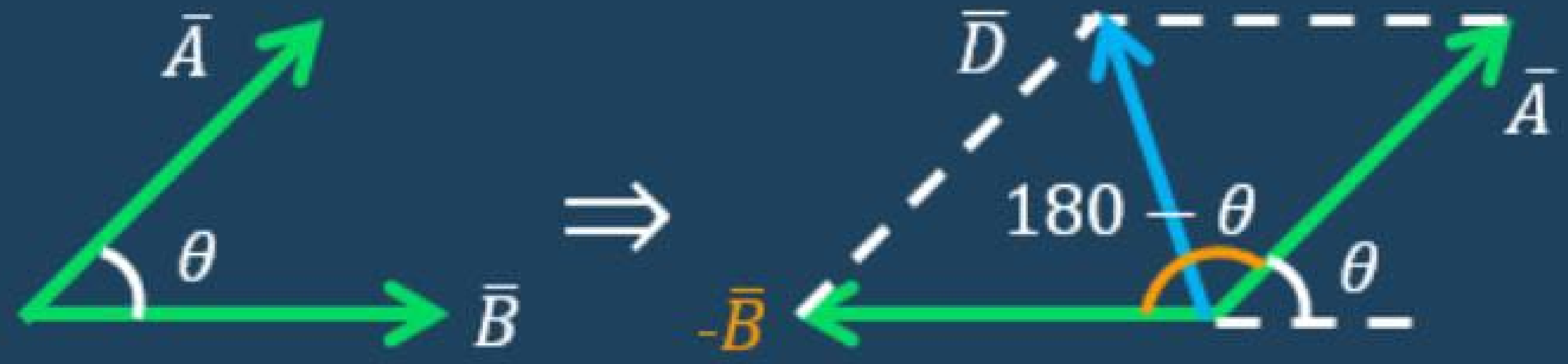
A: *Es el módulo del vector* $\bar{A}$.

B: *Es el módulo del vector* $\bar{B}$.

θ: *Es el ángulo formado por los vectores* $\bar{A}$ *y* $\bar{B}$.

Demostración de la Fórmula:

*Consiste en invertir el sentido del vector con signo negativo; y luego, sumar*lo con el otro *vector, por el método analítico. Se tiene en cuenta que el nuevo ángulo entre los vectores es el suplemento del inicial* $(180 - \theta)$.



$$\bar{D} = \bar{A} - \bar{B}$$

$$\bar{D} = \bar{A} + (-\bar{B})$$

$$\bar{D} = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos(180-\theta)}$$

Además, por trigonometría, tenemos que:

$$\cos(180-\theta) = -\cos\theta$$

Entonces:

$$\bar{D} = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$$

Método de Componentes Rectangulares

Consiste en descomponer, cada vector a sumar, en componentes rectangulares para obtener, a partir de éstas, las componentes rectangulares y el módulo del vector resultante.

Paso 1: Descomponer cada vector en sus componentes rectangulares.

Paso 2: Hallar la componente rectangular, en el eje x, del vector resultante. Para ello, se suman las componentes rectangulares, en el eje x, de todos los vectores a sumar, teniendo en cuenta el sentido de cada componente.

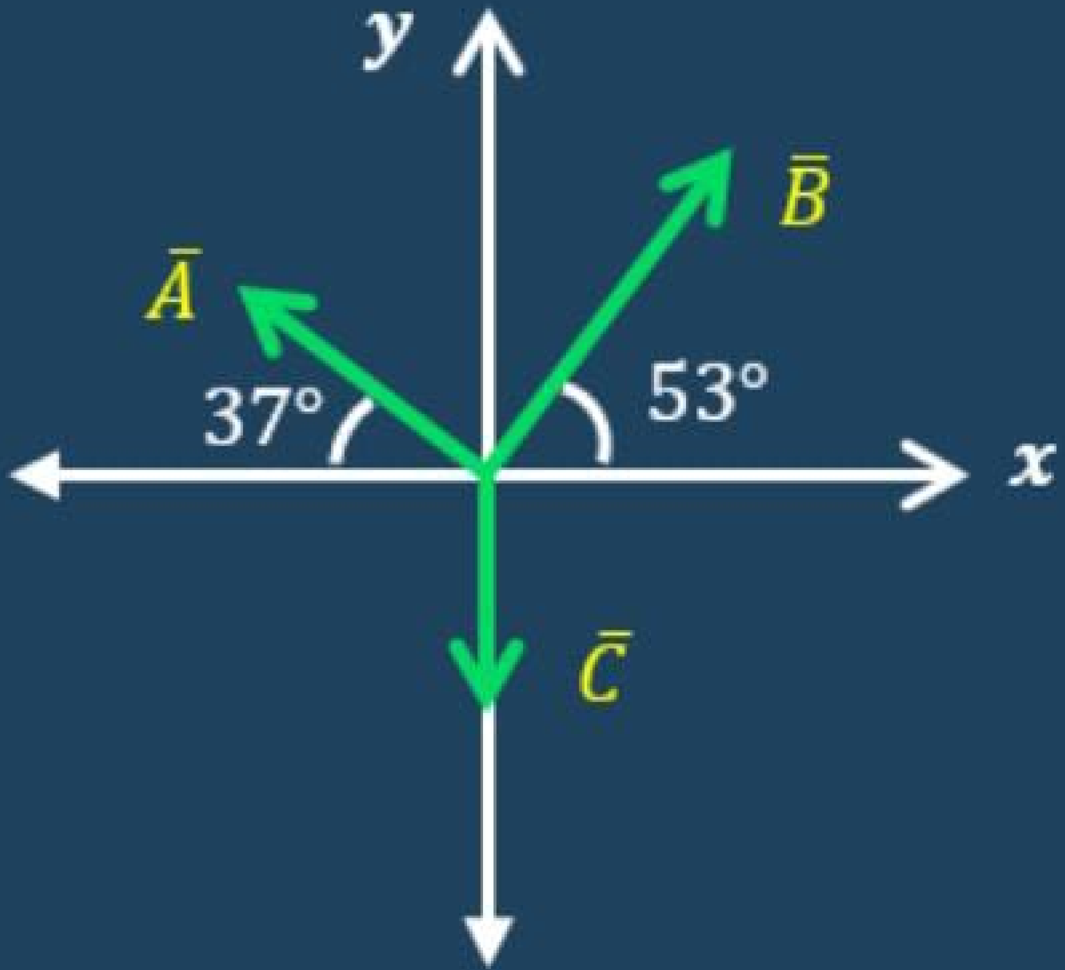
Paso 3: Hallar la componente rectangular, en el eje y, del vector resultante. Para ello, se suman las componentes rectangulares, en el eje y, de todos los vectores a sumar, teniendo en cuenta el sentido de cada componente.

Paso 4: Calcular el módulo del vector resultante empleando el Teorema de Pitágoras, a partir de sus componentes rectangulares. Es decir, el módulo del vector resultante será igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los módulos de sus componentes rectangulares.

Problema 1:

En el siguiente sistema de vectores, hallar el módulo del vector resultante, si:

$$|\bar{A}| = 20\ ;\ |\bar{B}| = 25\ ;\ |\bar{C}| = 15$$



Solución:

Comenzamos descomponiendo los vectores $\bar{A}, \bar{B}$ y $\bar{C}$.

$A_x = A\cos 37 = 20\cos 37 = 16$

$A_y = A\,\text{sen}\,37 = 20\,\text{sen}\,37 = 12$

$\bar{A} = \bar{A}_x + \bar{A}_y$

$\bar{A} = -A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath}$

$\bar{A} = -16\,\hat{\imath} + 12\,\hat{\jmath}$

$B_x = B\cos 53 = 25\cos 53 = 15$

$B_y = B\,\text{sen}\,53 = 25\,\text{sen}\,53 = 20$

$\bar{B} = \bar{B}_x + \bar{B}_y$

$\bar{B} = B_x\,\hat{\imath} + B_y\,\hat{\jmath}$

$\bar{B} = 15\,\hat{\imath} + 20\,\hat{\jmath}$

$C_x = C\cos 90 = 15\cos 90 = 0$

$C_y = C\,\text{sen}\,90 = 15\,\text{sen}\,90 = 15$

$\bar{C} = \bar{C}_x + \bar{C}_y$

$\bar{C} = C_x\,\hat{\imath} - C_y\,\hat{\jmath}$

$\bar{C} = 0\,\hat{\imath} - 15\,\hat{\jmath}$

Luego, calculamos la componente, en el eje x, del vector resultante.

$$\bar{R}_x = \bar{A}_x + \bar{B}_x + \bar{C}_x$$

$$\bar{R}_x = -16\,\hat{\imath} + 15\,\hat{\imath} + 0\,\hat{\imath}$$

$$\bar{R}_x = -\hat{\imath}$$

Después, calculamos la componente, en el eje y, del vector resultante.

$$\bar{R}_y = \bar{A}_y + \bar{B}_y + \bar{C}_y$$

$$\bar{R}_y = 12\,\hat{\jmath} + 20\,\hat{\jmath} - 15\,\hat{\jmath}$$

$$\bar{R}_y = 17\,\hat{\jmath}$$

Por último, calculamos el módulo del vector resultante con el Teorema de Pitágoras.

$$R = \sqrt{{R_x}^2 + {R_y}^2}$$

$$R = \sqrt{1^2 + 17^2}$$

$$\boldsymbol{R = \sqrt{290}}\,; \quad \textbf{\textit{Rpta.}}$$

Adicionalmente, expresamos el vector resultante.

$$\bar{R} = \bar{R}_x + \bar{R}_y$$

$$\bar{R} = -\hat{\imath} + 17\hat{\jmath}$$